Über die Rekursivität von V-topologischen Körpern

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Hohen Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich - Wilhelm - Universität

zu

Bonn

vorgelegt von

Hans-Michael Günther

aus Friedberg/Hessen

1980

Über die Rekursivität von V-topologischen Körpern

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Hohen Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich - Wilhelms - Universität

zu

Bonn

vorgelegt von

Hans-Michael Günther

aus Friedberg / Hessen

1980

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. M. Ziegler

Korreferent: Prof. Dr. G. Hasenjaeger

Tag der Promotion: 27. Juni 1980

Einleitung

In der rekursiven Algebra werden solche Strukturen und solche Isomorphismen zwischen diesen Strukturen betrachtet, die jeweils gewisse Rekursivitätsbedingungen erfüllen. Dabei haben sich in den letzten Jahren zwei Gesichtspunkte herauskristallisiert, unter denen eine Klasse von Strukturen betrachtet werden kann:

Es gibt rekursive Strukturen, die klassisch aber nicht rekursiv isomorph sind. Damit stellt sich die Frage nach einer Beschreibung der Gesamtheit derjenigen rekursiven Isomorphieklassen, in die eine klassische Isomorphieklasse zerfällt. Gibt es z.B. in einem noch zu präzisierenden Sinn minimale oder maximale Elemente, oder läßt sich eine Klasse von Unlösbarkeitsgraden bijektiv auf diese Klasse abbilden?

Für bestimmte rekursive Strukturen lohnt es sich, den Verband derjenigen Unterstrukturen zu untersuchen, die eine r.a. Teilmenge bilden. In diesem Verband lassen sich in naheliegender Weise Eigenschaften wie "maximal", "simpel" oder "kreativ" definieren und mit den ebenso bezeichneten Eigenschaften im Verband der r.a. Mengen vergleichen. Dabei gibt es Eigenschaften, die unter einem algebraischen Gesichtspunkt zerfallen. Außerdem müssen wegen der zum Teil komplizierteren verbandstheoretischen Verhältnisse für analoge Sätze neue Beweismethoden gefunden werden.

Untersuchungen unter diesen beiden Gesichtspunkten über Vektorräume, Boole'sche Algebren, Körper und Matroide finden sich in Arbeiten von Metakides, Kalantari, Nerode, Remmel, Retzlaff und anderen. Für Ordnungen haben Metakides und Remmel und für topologische Räume haben Kalantari und Retzlaff Frage 2 in etwas modifizierter Form untersucht.

In der vorliegenden Arbeit sollen einige Ergebnisse bewiesen werden, die den Rahmen für eine Theorie der Rekursivität von rekursiv vollständigen V-topologischen Körpern gemäß den angegebenen Fragestellungen abstecken könnten. Da diese Resultate nur von der Matroidstruktur des algebraischen Abschlusses und gewissen topologischen Bedingungen abhängen, werden wir sie auf eine entsprechende Theorie der Rekursivität von gewissen topologischen Matroiden zurückführen.

Numerierungen und Codierungen haben in der rekursiven Algebra eine ähnliche Aufgabe wie Karten in der Differentialgeometrie. Unter einer Numerierung (Codierung) der Menge M verstehen wir eine surjektive Abbildung von der Menge ω der natürlichen Zahlen (der Menge G der einstelligen totalen rekursiven Funktionen über ω) auf M. Dadurch führen wir Probleme der Berechenbarkeit über M auf solche über ω bzw. G zurück.

In §2 werden wir die später benötigten Eigenschaften von Numerierungen und Codierungen bereitstellen. Dabei enthält §2 über die später benötigten Resultate hinaus auch solche, die bestimmte Definitionen motivieren oder den jeweiligen Gedankengang abrunden sollen. Nach der Einführung von Numerierungen und Codierungen in den Abschnitten 2.1 bis 2.3 vergleichen wir in Abschnitt 2.4 die dabei benutzten Berechenbarkeitsbegriffe mit dem aus der Literatur bekannten Berechenbarkeitsbegriff auf $P\omega$, der Potenzmenge von ω. In Abschnitt 2.5 betrachten wir Codierungen mit speziellen Wortproblemen und stoßen dabei auf einen ersten Zusammenhang zur Topologie. In Abschnitt 2.6 beweisen wir zwei wichtige Sätze über die Komplexität von Beispielmengen, die es gestatten, gewisse rekursionstheoretische Eigenschaften von Mengen $A \subseteq G$ auf solche von Mengen $A \subseteq \omega$ zurückzuführen, und in Abschnitt 2.7 zeigen wir, daß Codierungen einen geeigneten Rahmen darstellen, um rekursiv vollständige Topologien rekursionstheoretisch zu beschreiben.

Matroide - sie verallgemeinern die in der Algebra beim Lösen von Gleichungen auftretenden Hüllenoperatoren - untersuchen wir in §3. Neben der Definition der in der Matroidtheorie üblichen Begriffe wie abgeschlossen, abhängig, Basis, Dimension, unabhängiges Komplemmt und regulär führen wir weitere Begriffe ein, die geeignet sind, Matroide zu charakterisieren. Erwähnt seien hier die Abschluß--Äquivalenzrelation, die Mengen I , J , X , Y und Z und die Operatoren cl' und cl^+ . In den §§ 4 und 5 werden wir dann später zeigen, inwieweit diese Begriffe auch unter Rekursivitätsgesichtspunkten äquivalente Eigenschaften liefern. Außerdem zeigen wir in Abschnitt 3.4 die Amalgamierungseigenschaft für die Klasse der Matroide und folgern daraus u.a. die Existenz eines universellen abzählbaren Matroids. Die Frage nach der Amalgamierungseigenschaft tauchte im Zusammenhang mit bestimmten Konstruktionen auf, die wir in dieser Arbeit nicht benötigen. Trotzdem soll Abschnitt 3.4 hier festgehalten werden.

In [6] wird zwischen Matroiden mit rekursiver Abhängigkeit und rekursiv präsentierten Matroiden unterschieden. Da für die Ergebnisse, die in der vorliegenden Arbeit bewiesen werden, der erste (schwächere) Begriff ausreicht, werden wir für numerierte Matroide nur diesen einführen. Daneben empfiehlt es sich aber noch, als Abschwächung Matroide mit r.a. Abhängigkeit zu betrachten. Numerierte Matroide mit rekursiver Abhängigkeit werden wir rekursiv und solche mit r.a. Abhängigkeit semirekursiv nennen. Semirekursive Matroide können als die natürliche Verallgemeinerung des Begriffs des rekursiven Körpers angesehen werden (vgl.§7). Nach der Einführung rekursiver und semirekursiver Matroide in Abschnitt 4.1 betrachten wir in Abschnitt 4.2 den Zusammenhang zwischen Semirekursivität und Rekursivität anhand der Rekursivitätseigenschaften einer Basis und beweisen in Abschnitt 4.3 einen Satz, der es gestattet, die Untersuchung von semirekursiven Matroiden auf die von rekursiven Matroiden mit einer rekursiven Teilmenge zurückzuführen.

Das am besten bekannte Matroid, das eine natürliche Codierung besitzt, ist der Körper der rekursiven reellen Zahlen versehen mit dem reellen Abschluß. Die charakteristischsten Eigenschaften dieser Codierung werden wir in §5 axiomatisch als zulässig codiertes Matroid einführen, und wir werden für zulässige Matroide Semikostruktivität definieren. Dabei werden sich gewisse Parallelen zwischen semikonstruktiven und semirekursiven Matroiden ergeben. Der Grund dafür ist Korollar (2.28). Außerdem werden wir der Frage nachgehen, welche Begriffe geeignet sind, eine Parallele zum Begriff des rekursiven Matroids darzustellen und Ergebnisse analog denen von §4 zu erhalten.

Für semikonstruktive Matroide werden wir in §6 den Verband derjenigen abgeschlossenen Teilmengen, die eine rekursive Beispielmenge haben, mit L und die Klasse derjenigen Elemente von L, die eine Basis mit einer rekursiven Beispielmenge haben, mit K bezeichnen. In den Abschnitten 6.1 bis 6.3 zeigen wir u.a. $K \subset L$ und daß K im Allgemeinen kein Verband ist. In Abschnitt 6.4 untersuchen wir für $A \in K$ die Menge $K(A) := \{B \in K \mid B \subseteq A\}$ und zeigen, daß sich alle Resultate von 6 über $L(U)$ durch Relativierung auf $K(A)$ übertragen lassen. Abschließend beweisen wir in Abschnitt 6.5 zwei Sätze über $K(A)$, die eine Aussage über die Klasse der rekursiven Matroide im Sinne der Frage 1 machen.

In §7 können wir zeigen, daß die rekursive Vervollständigung eines rekursiven V-topologischen Körpers ein semikonstruktives Matroid ist und daß in vielen Fällen die Klasse K genau aus denjenigen relativ algebraisch abgeschlossenen Unterkörpern besteht, die in einer erweiterten Sprache eine rekursive Struktur sind. Damit liefert §6 Aussagen über die Rekursivität von Unterkörpern eines rekursiv vollständigen v-topologischen Körpers. Für bewertete Körper stellen wir die Anwendungen der Theorie von §6 in den Abschnitten 7.2 bis 7.5 dar einschließlich der dabei benötigten Rekursivitätsbegriffe. In den Abschnitten 7.6

und 7.7 behandeln wir rekursive geordnete Körper und beantworten die Frage nach der Rekursivität der Bewertung von nicht archimedischen rekursiven geordneten Körpern negativ; und in Abschnitt 7.8 gehen wir schließlich noch kurz auf die rekursiven reellen, komplexen und p-adischen Zahlen ein, die Sonderfälle des bereits Bewiesenen sind bzw. sich mit bekannten Methoden behandeln lassen.

Für topologische Vektorräume lassen sich, wie wir in §8 sehen werden, ähnliche Resultate wie für V-topologische Körper zeigen. Allerdings nicht durch unmittelbare Anwendung der Ergebnisse von §6, da die fraglichen Matroide nicht zulässig sind.

Als Vorbereich für Codierungen haben wir G, eine für unsere Zwecke ausreichende Teilmenge von ${}^{\omega}\omega$ gewählt. Unter Gesichtspunkten der praktischen Berechenbarkeit (vgl. [14]) werden die Mengen ${}^{\omega}2$ oder $G \cap {}^{\omega}2$ jedoch als natürlicher angesehen. Die unterschiedlichen topologischen Eigenschaften (${}^{\omega}2$ ist kompakt, ${}^{\omega}\omega$ ist es nicht) lassen sich z.B. für die Anwendungen auf den Körper der rekursiven reellen Zahlen durch die bekannte Zweipunktkompaktifizierung $R \to R \cup \{\pm\infty\}$ oder durch die Einschränkung des Vorbereichs auf eine effektiv offene Teilmenge von $G \cap {}^{\omega}2$ berücksichtigen. Solche Bereiche sind im Gegensatz zu G lokalkompakt.

Herrn Prof. Dr. M. Ziegler möchte ich für das rege Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, und für seine Anregungen besonders danken.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546501_0029

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitung		iii
Inhaltsverzeichnis		ix
Symbolverzeichnis		xi
§ 1	Notation	1
§ 2	Numerierungen und Codierungen	5
2.1	Numerierungen	5
2.2	Numerierungen von W und H	7
2.3	Codierungen	9
2.4	Vergleich der c-Berechenbarkeit mit der über P_ω	11
2.5	Codierungen mit speziellem Wortproblem	13
2.6	Komplexität von Beispielmengen	17
2.7	Rekursivität von uniformen Räumen	21
§ 3	Matroide	27
3.1	Grundbegriffe der Matroidtheorie I	27
3.2	Grundbegriffe der Matroidtheorie II	30
3.3	Definition von X , V , Z , I , J , cl' und cl^*	34
3.4	Erweiterungstheorie, Amalgamierungseigenschaft	36
§ 4	Numerierte Matroide	39
4.1	Rekursive und semirekursive Matroide	39
4.2	Rekursivität von Basen	41
4.3	Einbettungssatz	42
4.4	Beweis von Lemma (4.2)	44
§ 5	Codierte Matroide	49
5.1	Semikonstruktive Matroide I	49
5.2	Semikonstruktive Matroide II	52
§ 6	$L(M,cl,c)$ und $K(M,cl,c)$	55
6.1	Einführung	55
6.2	$(K,\subseteq)$ als unterer Halbverband	56
6.3	$(K,\subseteq)$ ist kein oberer Halbverband	58
6.4	Rekursivität auf $K(A)$	61
6.5	$K(A)$ für einfache A	66

Seite

§ 7 V-topologische Körper 69

7.1 V-topologische Körper als semikonstruktive Matroide 69

7.2 Bewertete Körper als semikonstruktive Matroide 74

7.3 Rekursivität von bewerteten Körpern 76

7.4 L und K für bewertete Körper 80

7.5 Folgerungen aus §6 für bewertete Körper 83

7.6 Geordnete Körper als semikonstruktive Matroide 86

7.7 Die Bewertung von rekursiven geordneten Körpern 88

7.8 Die rekursiven reellen, komplexen und p-adischen Zahlen 90

§ 8 Topologische Vektorräume 95

Literaturverzeichnis 99

Symbolverzeichnis

	Seite
P , P_ω , M^c , Δ	1
$\| \|$	1,69
$\|$	1,3,28
$\times$, $\times_B^A$	1
$M^{m,n}$	1
$\nu^{m,n}$	5
ω , $<>$, D_x	1
$[\ ]_t$	2
F , G , H , W	2
E , E'	53
k , W_x , φ_x	2
γ , κ	7
w_x	55
p^n	3
$\tilde{M}$, $\hat{M}$	3,23
$\leq$, $\equiv$	3,6,10
$\leq^{eff}$, $\equiv^{eff}$	21
$\leq^{rek}$, $\equiv^{rek}$	23
C , $\tilde{\ }_\phi$, $\tilde{\ }_D$	27
ac , lc	28
fc	33
cl_A , cl' , cl^+	28,34
I , J , X , Y , Z	34
K , L	55
$K(A)$	61

§ 1 Notation

Für eine Menge M ist $\mathcal{P}M$ die Menge aller und $\mathcal{P}_\omega M$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M. Ist eine Grundmenge G gegeben (ggf. stillschweigend), dann ist M^c die Menge $G - M$. Mit $|M|$ bezeichnen wir die Mächtigkeit der Menge M. Und Δ ist die Diagonale $\{(x,x) | x \in M\}$ von M.

Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Teilmenge von $A \times B$, für die $(x,y) \in f \;\&\; (x,y') \in f \Rightarrow y = y'$ gilt. Den Vorbereich (bzw. Nachbereich) von f bezeichnen wir mit $Vb(f)$ (bzw. $Nb(f)$). f nennen wir total, wenn $Vb(f) = A$ ist. Für $A' \subset A$ ist $f|A'$ die Funktion $f \cap (A' \times B)$. Die Menge der totalen Funktionen $f : A \to B$ bezeichnen wir mit ${}^A B$.

Wenn nicht anders angegeben sind m und n natürliche Zahlen, die die Stellenzahl von Mengen oder Funktionen angeben. $m,n = 1$ lassen wir in der Notation weg. ${}^n M \times {}^m(\mathcal{P}_\omega M)$ kürzen wir durch $M^{n,m}$ ab. Die Schreibweisen $f(x)$ und fx für den Wert von f an der Stelle x und $f(A)$ und fA für $Nb(f|A)$ gebrauchen wir nebeneinander. Ist $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in {}^n Vb(f)$, so schreiben wir für $(fa_0,\dots,fa_{n-1})$ auch $f(a_0,\dots,a_{n-1})$ und benutzen die Verkettung $(f \cdot g)$ entsprechend. Im Übrigen gebrauchen wir für Funktionen die Notation des λ-Kalküls.

Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit ω und schreiben für $x \in \omega$ auch $x < \omega$. Für $x < \omega$ nehmen wir $x = \{y | y < x\}$ an. Die Cantor-Nummer des Paares $(x,y) \in {}^2\omega$ bezeichnen wir mit $\langle x,y \rangle$, und das Paar mit der Nummer z hat die Komponenten $\langle z \rangle_1$ und $\langle z \rangle_2$. Für n-Tupel und endliche Folgen benutzen wir entsprechend $\langle x_0,\dots,x_{n-1} \rangle^n$, $\langle z \rangle_m^n$, $\langle (x_m)_{m < \omega} \rangle^\omega$ bzw. $\langle z \rangle_m^\omega$. Zu $f : \omega \to \omega$ heißt $\{\langle x,y \rangle < \omega | (x,y) \in f\}$ der Graph von f ($Graph(f)$). $(D_x^n)_{n < \omega}$ ist eine feste bijektive und entscheidbare Aufzählung von $\mathcal{P}_\omega({}^n\omega)$.

Die Menge der rekursiven Funktionen definieren wir induktiv:

(a) Die nullstellige Funktion 0 ist rekursiv.

(b) Die Nachfolger-Funktion $\lambda x x+1$ ist rekursiv.

(c) Für $m \leq n < \omega$ ist die Projektionsfunktion $\lambda x_0 \ldots \lambda x_n x_m$ rekursiv.

(d) Die Verkettung führt von rekursiven zu rekursiven Funktionen.

(e) Der μ-Operator führt von rekursiven zu rekursiven Funktionen.

Wir stellen uns die Berechnung von rekursiven Funktionen in Schritten vor. Den Wert von f an der Stelle x nach t Schritten bezeichnen wir mit $[fx]_t$.

Mit H^n bezeichnen wir die Menge aller n-stelligen rekursiven Funktionen und mit G^n die Menge der totalen Funktionen aus H^n. F ist die Menge derjenigen Funktionen aus G, die an nur endlich vielen Stellen von 0 verschiedene Werte haben. Die Menge der r.a. Mengen $S \subseteq {}^n\omega$ bezeichnen wir mit W^n.

Aus dem induktiven Aufbau der rekursiven Funktionen erhalten wir n+1-stellige rekursive Funktionen k^n, die universell für H^n sind, das s-m-n-Theorem und das Rekursionstheorem erfüllen. Wir nehmen $k^n(x_0,\ldots,x_n) = k(x_0,\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{n-1})$ an. $\lambda y_1 \ldots \lambda y_n k^n(x,y,\ldots,x_n)$ bezeichnen wir mit φ^n_x und $Vb(\varphi^n_x)$ mit W^n_x.

Alle nicht definierten rekursionstheoretischen Begriffe gebrauchen wir wie in [9]. Insbesondere gebrauchen wir die folgenden zwischen $\leq_m$ und $\leq_{tt}$ (Wahrheitstafelreduzierbarkeit) liegenden Reduzierbarkeiten:

$$A \leq_c B \;:\Leftrightarrow\; \exists f \in G\, \forall x \in \omega\, (x \in A \Leftrightarrow D_{fx} \subseteq B)$$

$$A \leq_q B \;:\Leftrightarrow\; \exists f \in G\, \forall x < \omega\, (x \in A \Leftrightarrow D_{fx} \cap B \neq \emptyset)$$

$$A \leq_p B \;:\Leftrightarrow\; \exists f \in G\, \forall x < \omega\, (x \in A \Leftrightarrow \exists y \in D_{fx}\, D_y \subseteq B) \quad .$$

bc-, bq- und bp-Reduzierbarkeit (b für "beschränkt") definieren wir entsprechend dem Übergang von der tt- zur btt-Reduzierbarkeit.

Sei M eine Menge, und seien A, $B \subseteq \mathcal{P}M$, dann heißt A feiner als B, wenn es zu jedem $B \in B$ ein $A \in A$ mit $A \subseteq B$ gibt ($A \leq B$). Eine Uniformität N auf M ist ein Filter auf ^2M, der die folgenden Axiome erfüllt:

$$\langle \Delta \rangle \leq N$$

$$\langle N \mid N \in N \rangle \leq N$$

$$N \circ N \mid N \in N \rangle \leq N \quad .$$

Dabei seien $\overline{N} := \{(y,x) \mid (x,y) \in N\}$ und $N \circ N := \{(x,z) \mid \exists y\ (x,y),(y,z) \in N\}$.

Die Uniformität N erzeugt auf M eine Topologie T_N durch die Basis $\{\{y \in M \mid (x,y) \in N\} \mid x \in M \ \& \ N \in N\}$. T_N erfüllt genau dann das T_2-Axiom, wenn $\cap N = \Delta$ ist. Eine solche Uniformität nennen wir separiert. T_N ist genau dann diskret, wenn $\Delta \in N$ ist. Seien (M,N) und (M',N') uniforme Räume, dann heißt eine Funktion $f : M \to M'$ gleichmäßig stetig, wenn $fN \leq N'$ ist. Zu einem uniformen Raum (M,N) definieren wir auf ^nM die Produktuniformität P^nN und auf $A \subseteq M$ die Einschränkung A wie üblich.

Sei N eine Uniformität auf M mit einer abzählbaren Basis. Eine Folge $(a_n)_{n < \omega}$ von Elementen von M heißt eine Cauchy-Folge, wenn $\{\{(a_n,a_{n'}) \mid n,n' > m\} \mid m < \omega\} \leq N$ ist; und $(M,)$ heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge einen Limes hat. Zu einem uniformen Raum (M,N) mit abzählbarer Basis betrachten wir auf der Menge M' der Cauchy-Folgen den von $\{\{((a_n)_{n < \omega},(b_n)_{n < \omega}) \mid \exists m\ \forall n,n' > m\ (a_n,b_{n'}) \in N\} \mid N \in N\}$ erzeugten Filter N'. (M',N') ist vollständig und enthält - bezogen auf die Einbettung $a \to (a)_{n < \omega}$ - (M,N) als dichten Unterraum. Ist (M,N) außerdem separiert, so ist $(\tilde{M},\tilde{N}) := (M',N') / \cap N'$ der bis auf Isomorphie einzige vollständige separierte uniforme Raum, der (M,N) als dichten Unterraum enthält. Wir nennen $(\tilde{M},\tilde{N})$ die Vervollständigung von (M,N).

Auf W betrachten wir die durch die Basis $\{S \in W \mid D_x \subseteq S\} \mid x < \omega\}$ erzeugte Topologie T_W . (W,T_W) ist ein zusammenhängender T_0-Raum, der wegen

A offen $\Rightarrow \omega \in A$ kein anderes Trennungsaxiom erfüllt. Dagegen ist G versehen mit der Spurtopologie T_G (bezogen auf die Einbettung $f \mapsto \mathrm{Graph}(f)$) ein total unzusammenhängender Hausdorffraum und metrisch. Eine Metrik, die T_G erzeugt, ist z.B. $\lambda f\, \lambda g\, \inf\{x^{-1} \mid \forall y < x\ fx = gx\}$. Und eine Basis, die die zugehörige Uniformität erzeugt, ist z.B. $\{\{(f,g) \mid \forall n < m\ fn = gn\} \mid m < \omega\}$. Die natürliche Erweiterung dieser Uniformität auf ${}^{\omega}\omega$ ist vollständig.

§ 2 Numerierungen und Codierungen

2.2 Numerierungen

Definition (2.1) Eine Numerierung ν der Menge M ist eine Funktion $\nu : \omega \to M$ mit $Vb(\nu) = \omega$ und $Nb(\nu) = M$.

Zu einer Numerierung ν heißt die Diagonale Δ von M das Wortproblem von ν. Wir sagen, ν habe ein entscheidbares Wortproblem, wenn die Menge $\nu^{-1}\Delta$ rekursiv ist. Ist ν eine Numerierung von M, $a \in M^{m,n}$ und $x < \omega$ mit

$$(\nu\langle x\rangle_0^{m+n}, \ldots, \nu\langle x\rangle_{m-1}^{m+n}, \nu D_{\langle x\rangle_m^{m+n}, \ldots, \nu D_{\langle x\rangle_{m+n-1}^{m+n}}}) = a \quad ,$$

dann nennen wir x eine ν-Nummer von a und schreiben auch $\nu^{m,n}x = a$. Eine ν-Beispielmenge von $A \subseteq M^{m,n}$ ist eine Menge $S \subseteq \omega$ mit $\nu^{m,n}S = A$; und die ν-Indexmenge von $A \subseteq M^{m,n}$ ist die Menge $(\nu^{m,n})^{-1}A$.

Definition (2.2) Seien (M,ν) und (M',ν') numerierte Mengen.

1) Eine Funktion $f : M^{m,n} \to M'$ heißt (ν,ν')-berechenbar, wenn $Vb(f)$ eine r.a. ν-Indexmenge A hat und es ein $h \in H$ mit $Vb(h) = A$ und $\nu' \cdot h = f \cdot \nu^{m,n}$ gibt.
2) Ein Operator $op : M^{m,n} \to PM'$ heißt (ν,ν')-berechenbar, wenn $Vb(op)$ eine r.a. ν-Indexmenge A hat und es ein $h \in H$ mit $Vb(h) = A$ und $\nu' W_{hx} = op(\nu^{m,n}x)$ gibt.

Die Begriffe der (ν,ν')-berechenbaren Funktion und des (ν,ν')-berechenbaren Operators können als die Verallgemeinerungen der entsprechenden rekursiven Abbildungen auf numerierte Mengen angesehen werden. Für eine Verallgemeinerung des Begriffs der r.a. Menge bieten sich zunächst zwei Möglichkeiten an: Wir können wie für die Definitionsbereiche von berechenbaren Funktionen oder berechenbaren

Operatoren verlangen, daß die ν-Indexmenge von A r.a. ist. oder wir können verlangen, daß eine r.a. ν-Beispielmenge von A existiert. Diese beiden Begiffe fallen im Allgemeinen nicht zusammen. Hat jedoch ν ein entscheidbares Wortproblem und hat A eine r.a. ν-Beispielmenge, dann ist auch die ν-Indexmenge von A r.a. Bei solchen Numerierungen können wir deshalb einfach von r.a. und entsprechend von rekursiven Mengen sprechen. Weitere Möglichkeiten, r.a. auf numerierte Mengen zu verallgemeinern, werden in [4] unter dem Stichwort Teilobjekte diskutiert.

Eine injektive (ν,ν')-berechenbare Funktion $\varepsilon : M \to M''$ mit $Vb(\varepsilon) = M$ nennen wir eine rekursive Einbettung. Die Numerierung ν von M heißt reduzierbar auf die Numerierung ν' von M', wenn $M \subseteq M'$ gilt und $Id|M$ eine rekursive Einbettung ist. Dafür schreiben wir auch $(M,\nu) \leq (M',\nu')$ oder $\nu \leq \nu'$. Numerierungsäquivalenz definieren wir durch $\nu \equiv \nu' :\Leftrightarrow \nu \leq \nu' \;\&\; \nu' \leq \nu$.

Lemma (2.3) 1) Jede Numerierung einer unendlichen Menge mit entscheidbarem Wortproblem ist zu einer bijektiven Numerierung äquivalent.

2) Zu jeder Numerierung ν von M mit $\nu^{-1}\Delta \in \Pi_1$ existiert eine Numerierung von M mit entscheidbarem Wortproblem, die auf ν reduzierbar ist.

3) (ν,ν')-Berechenbarkeit und die Komplexitäten von ν-Indexmengen sind invariant beim Übergang zu äquivalenten Numerierungen, sofern die betrachteten Komplexitäten gröber als m-Äquivalenz sind.

2.2 Numerierungen von W und H

Im Folgenden werden wir eine Funktion $f : \omega \to \omega$ mit ihrem Graphen $\mathrm{Graph}(f)$ identifizieren und somit $G \subseteq H \subseteq W$ annehmen. Eine Numerierung ν von $A \subseteq W$ heißt berechenbar, wenn die Menge $\{\langle x,y\rangle \mid y \in \nu x\}$ r.a. ist; und $A \subseteq W$ nennen wir berechenbar, wenn A eine berechenbare Numerierung besitzt. Aus $f \in H \Leftrightarrow \mathrm{Graph}(f) \in W$ folgt, daß die Numerierung ν von $A \subseteq H$ genau dann berechenbar ist, wenn die Funktion $\lambda x \lambda y(\nu x)(y)$ rekursiv ist. Ein einfaches Beispiel für eine berechenbare Teilmenge von W ist F.

Lemma (2.4) Sei ν eine berechenbare Numerierung von $A \subseteq G$. Dann ist $\nu^{-1}\Delta \in \Pi_1$, und jede Numerierung ν' von $A' \subseteq A$ mit $\nu' \leq \nu$ ist berechenbar.

Die Aufzählungen $(W_x)_{x<\omega}$ und $(\varphi_x)_{x<\omega}$ von W und H liefern uns natürliche Numerierungen dieser Mengen:

$$\gamma : \omega \to \quad : x \to W_x$$

$$\kappa : \omega \to \quad : x \to \varphi_x \quad .$$

Wir werden die Schreibweisen γx und W_x bzw. κx und φ_x nebeneinander gebrauchen. Das folgende Lemma charakterisiert γ und κ durch eine Invariante.

Lemma (3.2) 1) γ ist eine berechenbare Numerierung von W, auf die jede berechenbare Numerierung von $A \subseteq W$ reduzierbar ist.

2) κ ist eine berechenbare Numerierung von H, auf die jede berechenbare Numerierung von $A \subseteq H$ reduzierbar ist.

In Lemma (2.18) werden wir sehen, daß G keine berechenbare Numerierung besitzt. Beweistechnisch nützlich sind die folgenden Resultate. (vgl. dazu auch Abschnitt 2.4)

Lemma (2.6) Es gibt bijektive s , $r \in G^2$ mit $\gamma(sxy) = \gamma x$ und $\kappa(rxy) = \kappa x$.

Lemma (2.7) $A \subseteq W$ ($A \subseteq H$) ist genau dann berechenbar, wenn A eine r.a. γ-Beispielmenge (κ-Beispielmenge) besitzt.

Lemma (2.8) Zu jeder γ-berechenbaren Funktion $\varphi : W^{m,n} \to W$ gibt es eine totale γ-berechenbare Funktion $g : W^{m,n} \to W$ mit $g|Vb(\varphi) = \varphi$.

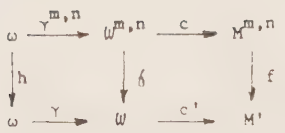
2.3 Codierungen

Definition (2.9) Eine Codierung c der Menge M ist eine Funktion $c : G \to M$ mit $Vb(c) = G$ und $Nb(c) = M$.

Zu einer Codierung c heißt die Diagonale Δ von M da Wortproblem von c . Ist c eine Codierung von M , $a \in M^{m,n}$ und $x < \omega$ mit $c \cdot \gamma^{m,n} = a$, dann nennen wir x eine c-Gödelnummer von a . Eine c-Beispielmenge von $A \subseteq M^{m,n}$ ist eine Menge $S \subseteq \omega$ mit $c \cdot \gamma^{m,n} S = A$; und eine c-Indexmenge von $A \subseteq M^{m,n}$ ist eine Menge $S \subseteq \omega$ mit $\exists A \subseteq W^{m,n}(S = (\gamma^{m,n})^{-1} A \;\&\; A \cap G = c^{-1} A)$. Diese Definition der c-Indexmenge trägt dem partiellen Charakter von $c \cdot \gamma^{m,n}$ Rechnung.

Definition (2.10) Seien (A,ν) eine numerierte und (M,c) und (M',c') codierte Mengen.

1) Eine Funktion $f : M^{m,n} \to M'$ heißt (c,c')-berechenbar, wenn $Vb(f)$ eine r.a. c-Indexmenge S besitzt und es eine γ-berechenbare Funktion $\delta : \gamma^{m,n} S \to W$ mit $c' \cdot \delta = f \cdot c$ gibt.
2) Ein Operator $op : M^{m,n} \to M'$ heißt (c,c')-berechenbar, wenn $Vb(op)$ eine r.a. c-Indexmenge S besitzt und es einen γ-berechenbaren Operator $op : \gamma^{m,n} S \to PW$ mit $c' \cdot op = op \cdot c$ gibt.
3) Eine Funktion $f : A^{m,n} \to M$ heißt (ν,c)-berechenbar, wenn $Vb(f)$ eine r.a. ν-Indexmenge S besitzt und es eine (Id,γ)-berechenbare Funktion $\delta : Id^{m,n} S \to W$ mit $c \cdot \delta = f \cdot \nu$ gibt.
4) Eine Funktion $f : M^{m,n} \to A$ heißt (c,ν)-berechenbar, wenn $Vb(f)$ eine r.a. c-Indexmenge S besitzt und es eine (γ,Id)-berechenbare Funktion $\delta : \gamma^{m,n} S \to \omega$ mit $\nu \cdot \delta = f \cdot c$ gibt.



Definition (2.10.1) und Definition (2.2.1) ergeben zusammen das nebenstehende Diagramm, von dem Kommutativität verlangt wird. Die Kommutativität des äußeren Teiles alleine ($c' \cdot \gamma \cdot h = f \cdot c \cdot \gamma^{m,n}$) zu verlangen, genügt nicht, will man nicht einen anderen Berechenbarkeitsbegriff erhalten. Als Beispiel mögen die codierten Mengen (G,Id) und (W,$\lambda f \gamma f 0$) mit der Einbettung $G \subseteq W$ dienen. Entsprechendes gilt auch für die nach (2) und (4) definierten Berechenbarkeitsbegriffe. Für (3) ist die entsprechende Forderung leer.

Analog zur Reduzierbarkeit von Numerierungen nennen wir die Codierung c von M reduzierbar auf die Codierung c' von M' ($(M,c) \leq (M',c')$ oder $c \leq c'$), wenn $M \subseteq M'$ gilt und $Id|M$ (c,c')-berechenbar ist, und definieren Codierungs-Äquivalenz durch $c \equiv c' \Leftrightarrow c \leq c' \;\&\; c' \leq c$.

Lemma (2.11) Die (c,c')-Berechenbarkeit und die Komplexität von c-Indexmengen sind invariant beim Übergang zu äquivalenten Codierungen, sofern die betrachteten Komplexitäten gröber als m-Äquivalenz sind.

Eine injektive (ν,c)-berechenbare Funktion $\varepsilon : A \to M$ mit $Vb(\varepsilon) = A$ nennen wir eine rekursive Einbettung und schreiben $\nu \leq c$, falls $A \subseteq M$ gilt und $Id|A$ eine rekursive Einbettung ist.

2.4 Vergleich der c-Berechenbarkeit mit der über $P\omega$

Dieser Abschnitt dient dazu, einen Zusammenhang zwischen den in den Abschnitten 2.1 bis 2.3 definierten Berechenbarkeitsbegriffen und dem aus der Literatur bekannten Berechenbarkeitsbegriff auf $P\omega$ herzustellen. Wir beschränken uns dabei auf Mengen $A \subseteq {}^n(P\omega)$ und tota e Funktionen $\zeta : {}^n(P\omega) \to P\omega$. (vgl. Lemma (2.8))

Definition (2.12) 1) Eine Menge $A \subseteq {}^n(P\omega)$ heißt semirekursiv, wenn es ein $z < \omega$ mit $A \in \mathfrak{A} \iff \exists y < \omega\ (y \in W_z \ \&\ D_y^n \subseteq A)$ gibt.

2) Eine totale Funktion $\zeta : {}^n(P\omega) \to P\omega$ heißt rekursiv, wenn es ein $z < \omega$ mit $x \in \zeta A \iff \exists y < \omega\ ((x,y) \in W_z^2 \ \&\ D_y^n \subseteq A)$ gibt.

Satz (2.13) 1) Eine Menge $A \subseteq {}^nW$ hat genau dann eine r.a. γ-Indexmenge, wenn es eine semirekursive Menge $B \subseteq {}^n(P\omega)$ mit $A = B \cap {}^nW$ gibt.

2) Eine totale Funktion $\zeta : {}^nW \to W$ ist genau dann γ-berechenbar, wenn es eine rekursive Funktion $g : {}^n(P\omega) \to P\omega$ mit $\zeta = g \restriction {}^nW$ gibt.

3) Es gibt eine rekursive Funktion $\zeta : P\omega \to P\omega$ mit $\zeta G \subseteq G$ und $\zeta({}^\omega\omega) \not\subseteq {}^\omega\omega$.

Zum Beweis von Satz (2.13) vgl. [9,§14,§15]. (1) ist auch als Satz von Rice und Shapiro und (2) als Satz von Myhill und Shepherdson bekannt.

Korollar (2.14) Seien (M,c) und (M',c') codierte Mengen.

1) Eine Menge $A \subseteq {}^nM$ hat genau dann eine r.a. c-Indexmenge, wenn es eine semirekursive Menge $A \subseteq {}^n(P\omega)$ mit $c^{-1}A = A \cap {}^nG$ gibt.

2) Eine totale Funktion $f : {}^nM \to M'$ ist genau dann (c,c')-berechenbar, wenn es eine rekursive Funktion $\zeta : {}^n(P\omega) \to P\omega$ mit $f \cdot c = c' \cdot \zeta \restriction {}^nG$ gibt.

3) Es gibt eine codierte Menge (M,c) und eine totale c-berechenbare Funktion $f : M \to M$, so daß keine rekursive Funktion $\S : P\omega \to P\omega$ mit $f \cdot c = c \cdot \S | G$ und $\S({}^{\omega}\omega) \subseteq {}^{\omega}\omega$ existiert.

Wir bemerken noch, daß in [9,S.371] ein Beispiel zu (3) angegeben ist, das die in Abschnitt 7.8 eingeführte Codierung der rekursiven reellen Zahlen benutzt. Auf das folgende Korollar zu Satz (2.13) werden wir im nächsten Abschnitt zurückkommen.

Korollar (2.15) 1) Jede Menge $A \subseteq {}^{n}W$ mit einer r.a. γ-Indexmenge ist bezüglich $P^{n}(T_W)$ offen.

2) Jede γ-berechenbare Funktion $\S : {}^{n}W \to W$ ist bezüglich $P^{n}(T_W)$ und T_W stetig.

2.5 Codierungen mit speziellem Wortproblem

Zu einer codierten Menge (M,c) betrachten wir auf ${}^nM$ die c-Topologie $\mathcal{T}_c^n$. $\mathcal{T}_c^n$ ist die finale Topologie bezüglich c und $P^n(\mathcal{T}_G)$. Offenbar gilt $P^n(\mathcal{T}_c) \subseteq \mathcal{T}_c^n$, aber im Allgemeinen nicht $P^n(\mathcal{T}_c) = \mathcal{T}_c^n$, wie weiter unten aus Lemma (2.19) folgt. Nach Korollar (2.15) und der Definition von $\mathcal{T}_c^n$ ist jede c-berechenbare Funktion $f : {}^nM \to M$ bezüglich $\mathcal{T}_c^n$ und $\mathcal{T}_c$ stetig, und jede Menge $A \subseteq {}^nM$ mit einer r.a. c-Indexmenge ist bezüglich $\mathcal{T}_c^n$ offen. Daher nennen wir eine solche Menge auch effektiv offen. Entsprechend nennen wir eine Menge $A \subseteq {}^nM$ effektiv abgeschlossen, wenn ihr Komplement eine r.a. c-Indexmenge besitzt, und eine Menge $A \subseteq {}^nM$, die effektiv offen und effektiv abgeschlossen ist, nennen wir effektiv offen-abgeschlossen.

Definition (2.16) Sei c eine Codierung von M. Eine Menge $A \subseteq {}^nM$ nennen wir effektiv c-dicht, wenn es ein $h \in H$ mit $Vb(h) = \{x \mid \exists S \in G\ D_x \subseteq S\}$ und $D_x \subseteq W_{hx}$ & $c(W_{hx}) \in A$ gibt.

Lemma (2.17) Sei c eine Codierung von M. Eine Menge $A \subseteq {}^nM$ ist genau dann effektiv c-dicht, wenn A eine r.a. c-Beispielmenge A' mit $\gamma A'$ dicht in $\mathcal{T}_G$ hat.

Beweis: 1) Sei A effektiv c-dicht via h. Dann leistet $Nb(h)$ das Verlangte.

2) Sei A' eine r.a. c-Beispielmenge von A mit A' dicht. Dann liefert das Selection Theorem angewandt auf die r.a. Relation $R := \{(x,y) \mid D_x \subseteq W_y$ & $y \in A'\}$ ein $h \in H$ mit $Vb(h) = \{x \mid \exists y\ (x,y) \in R\}$. Es folgt A effektiv c-dicht via h.

Nach Lemma (2.17) ist z.B. M effektiv c-dicht via F. Wegen der Stetigkeit von c bezüglich τ_G und τ_c ist jede effektiv c-dichte Menge dicht in τ_c. Dagegen liefert die Codierung

$$cf := \begin{cases} \lambda x f(x+1) & f0 = 0 \\ \lambda x 0 & f0 \neq 0 \end{cases}$$

mit der Menge $G - \{\lambda x 0\}$ ein Beispiel für eine in τ_c dichte Mege, deren c-Urbild nicht dicht ist.

Für Codierungen mit effektiv abgeschlossenem Wortproblem liefert das folgende Lemma eine später wiederholt benutzte Abschätzung der Komplexität von bestimmten Beispielmengen.

Lemma (2.18) Seien c eine Codierung von M, Δ effektiv abgeschlossen, A, $B \subseteq M$ mit c-Beispielmengen aus Σ_2, und sei A' eine solche c-Beispielmenge von A. Dann ist $A' \cap (c \cdot \gamma)^{-1} B$ aus Σ_2.

Beweis: Sei B' eine c-Beispielmenge von B aus Σ_2. Dann liefert $x \in A' \cap (c \cdot \gamma)^{-1} B \iff x \in A' \,\&\, \exists y \in B'\, c \cdot \gamma x = c \cdot \gamma y$ die Behauptung.

Die Beweisidee des folgenden Lemmas werden wir im Beweis von Lemma (6.8) aufgreifen und verfeinern.

Lemma (2.19) Sei c eine Codierung von M, und seien Δ effektiv abgeschlossen und Δ^c effektiv c-dicht. Dann ist M unendlich und hat keine r.a. c-Beispielmenge.

Beweis: Wir benutzen die Idee des zweiten Cantor'schen Diagonalverfahrens. Annahme: $s \in G$ zähle eine r.a. c-Beispielmenge von M bijektiv auf. Wir kon-

struieren ein $\lambda xwx \in G$ schrittweise bei $x = 0$ beginnend. Die Schritte nennen wir t. Nach $t-1$ Schritten sei das endliche Anfangsstück w_t von w konstruiert. Da Δ^c effektiv c-dicht ist, gibt es ein $v \in G$ mit $w_t \subseteq v$ und $c \cdot \gamma(st) \neq cv$, und da Δ effektiv abgeschlossen ist, gibt es ein endliches Angangsstück v' von v mit $\forall u \in G\ (v' \subseteq u \Rightarrow cu \neq c \cdot \gamma(st))$ und kann effektiv gefunden werden. Wir setzen $w_{t+1} := w_t \cup v'$. Nach dieser Konstruktion ist $w \in G$, und cw ist von allen $a \in M$ verschieden. Widerspruch.

Die folgenden Ergebnisse mögen die Überlegungen zu Codierungen mit speziellem Wortproblem abschließen.

Lemma (2.20) Sei c eine Codierung von M.

1) Es gilt (i) $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ (ii) $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ (iii).

(i) T_c erfüllt das T_2-Axiom.

(ii) Δ ist abgeschlossen.

(iii) T_c erfüllt das T_1-Axiom.

2) Δ ist genau dann offen, wenn T_c diskret ist.

3) Ist Δ effektiv offen, dann hat M eine r.a. c-Beispielmenge.

Beweis: 1) T_c erfüllt genau dann das T_2-Axiom, wenn Δ in $P^2(T_c)$ abgeschlossen ist. Dann ist Δ wegen $P^n(T_c) \subseteq T_c^n$ auch in T_c^2 abgeschlossen. Ist das Urbild von Δ abgeschlossen, so ist das Urbild jedes $a \in M$ abgeschlossen, und genau dann erfüllt T_c das T_1-Axiom.

(ii) $\not\Rightarrow$ (i): $c : G \to G$,

$$(cf)x = \begin{cases} 0 & f = \lambda x 0 \\ 1 & f \neq \lambda x 0 \ \&\ x < f0 \\ f(x-f\,) & \text{sonst} \end{cases}.$$

(iii) $\not\Rightarrow$ (ii): $c : G \to G \cup 1$:

$$f \to \begin{cases} 0 & f = \lambda x 0 \\ \lambda x f(x+1) & \text{sonst} \end{cases}.$$

2) T_c ist genau dann diskret, wenn alle Elemente von M offen sind. Das ist genau dann der Fall, wenn ihre Urbilder offen sind. Genau dann ist Δ offen.
3) Da F in T_G dicht liegt und T_c diskret ist, ist jede γ-Beispielmenge von F eine c-Beispielmenge von M.

Die Ergebnisse von Lemma (2.19) und Lemma (2.20.3) können als die effektive Version von zwei Sätzen der mengentheoretischen Topologie aufgefaßt werden: Eine abgeschlossene und dichte Äquivalenzrelation auf $^{\omega}\omega$ besteht aus überabzählbar vielen Äquivalenzklassen; insbesondere ist $^{\omega}\omega$ selbst überabzählbar. Und eine offene Äquivalenzrelation auf $^{\omega}\omega$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Äquivalenzklassen.

2.3 Komplexität von Beispielmengen

Von den in diesem Abschnitt bewiesenen Ergebnissen über die Komplexität von Beispielmengen werden wir später nur die Korollare (2.23.3) und (2.28.2) benötigen.

Lemma (2.21) 1) Seien ν und ν' Numerierungen von M mit $\nu \leq \nu'$, sei $A \subseteq M^{m,n}$, und sei S eine ν-Beispielmenge von A. Dann besitzt A eine ν'-Beispielmenge S' mit $S' \leq_e S$.

1) Es gibt eine Menge M, zwei äquivalente Numerierungen ν und ν' von M und $A \subseteq M$, so daß die einzige ν-Beispielmenge von A vollständig r.a. ist und A in jedem m-Grad eine ν'-Beispielmenge besitzt.

Beweis: 1) Sei $\nu \leq \nu'$ via h, und sei o.B.d.A. $A \subseteq M$. $S' := hS$.

2) Sei $M \subseteq \omega$ vollständig r.a. mit $0 \in M$, und $s \in G$ zähle M bijektiv auf. Dann können wir ν und ν' durch $\nu|M - \{0\} := Id$, $\nu(M^c \cup \{0\}) := 0$, $\nu'(2x) := sx$ und $\nu'(2x+1) := x$ und A als $M - \{0\}$ definieren.

Lemma (2.21) legt es nahe, e-Grade als einen geeigneten Begriff anzusehen, um Mengen $A \subseteq M$ nach der Komplexität ihrer ν-Beispielmengen zu klassifizieren. Für die Numerierung γ von W und damit für Codierungen lassen sich weitergehende Existenzsätze als Lemma (2.21.1) zeigen. Dabei werden wir davon Gebrauch machen, daß γ zylindrisch ist. (vgl. Lemma (2.6))

Lemma (2.22) $A \subseteq W^{m,n}$ habe die γ-Beispielmenge $A \subseteq \omega$, und sei $B \subseteq \omega$ mit $A \leq_e B$. Dann gibt es eine γ-Beispielmenge $A' \subseteq \omega$ von A mit $A' \leq_c B$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $A \subseteq W$, und sei s die Funktion von Lemma (2.6).

1) Sei $A \leq_e B$ via n, d.h. es gelte $a \in A \iff \exists v\,(\langle x,v\rangle \in W_n \;\&\; D_v \subseteq B)$.

Wir definieren $s(x,\langle y,z\rangle) \in A' :\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in [W_n]_z$ & $D_y \subseteq B$. Aus der Bijektivität von s folgt, daß $A' \subseteq \omega$ wohldefiniert ist.

2) Sei $s(x,\langle y,z\rangle) \in A'$. Dann ist $x \in A$. Es folgt $\gamma \cdot s(x,\langle y,z\rangle) = \gamma x \in A$.

3) Sei $a \in A$. Dann gibt es x , y , $z < \omega$ mit $\langle x,y\rangle \in [W_n]_z$ & $D_y \subseteq B$ und $x \cdot A$. Es folgt $s(x,\langle y,z\rangle) \in A'$ und $a \in \gamma A'$.

4) $A' \leq_c B$ folgt sofort aus der Definition von A' .

Korollar (2.23) 1) Jede Menge $A \subseteq \mathcal{W}^{m,n}$ mit einer γ-Beispielmenge aus Σ_1 (Σ_2) besitzt eine γ-Beispielmenge aus Δ_1 (Π_1).

2) Sei c eine Codierung von M , und $A \subseteq M^{m,n}$ habe eine c-Beispielmenge aus Σ_1 (Σ_2). Dann besitzt A eine c-Beispielmenge aus Δ_1 (Π_1).

Lemma (2.24) $A \subseteq \mathcal{W}^{m,n}$ sei nicht leer und habe die γ-Beispielmenge $A \subseteq \omega$, und sei $B \subseteq \omega$ mit $A \leq_m B$. Dann gibt es eine γ-Beispielmenge A' von A mit $A' \equiv_m B$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $A \subseteq \mathcal{W}$, und sei s die Funktion von Lemma (2.6).

1) Sei $x \in A$. Dann ist $A_0 := \{sxz \mid z < \omega\}$ eine rekursive γ-Beispielmenge für γx . Wir definieren $A' := (A - A_0) \cup \{sx0\} \cup \{s(x,z+1) \mid z \in B\}$. $\gamma A' = A$ folgt aus $(A - A_0) \cup \{sx0\} \subseteq A' \subseteq A \cup A_0$ und $\gamma((A - A_0) \cup \{sx0\}) = \gamma(A \cup A_0) = A$.

2) Aus $(A - A_0) \cap A_0 = \emptyset$ folgt $z \in B \Leftrightarrow s(x,z+1) \in A$ und damit $B \leq_m A'$.

3) Sei $A \leq_m B$ via h . Dann ist $A' \leq_m B$ via h' definiert durch

$$h'y : \begin{cases} \mu z(s(x,z+1) = y) & y \in A_0 - \{sx0\} \\ hy & \text{sonst} \end{cases} .$$

Satz (2.25) 1) Sei $A \subseteq \mathcal{W}^{m,n}$. Dann ist die Menge der c-Grade, in denen A eine γ-Beispielmenge besitzt, unter e-Äquivalenz abgeschlossen.

2) Seien a und b verschiedene e-Grade. Dann gibt es ein $A \subseteq G^{m,n}$,das in

einem dieser e-Grade eine γ-Beispielmenge besitzt und im anderen nicht.

Beweis: 1) Lemma (2.22), Lemma (2.24).

2) Seien A, $B \subseteq \omega$ mit $A \not\leq_e B$. Dann hat $A = \{\lambda x n \mid n \in A\}$ eine γ-Beispielmenge im e-Grad von A. Angenommen A hat eine γ-Beispielmenge $S \equiv_e B$, dann liefert $x \in A \iff \exists y\,(\gamma y(0) = x \;\&\; y \in B')$ einen Widerspruch zu $A \not\leq_e B$.

Eine Menge $A \subseteq G$ nennen wir <u>effektiv dicht</u>, wenn A effektiv Id-dicht ist. Nach Lemma (2.17) und Lemma (2.7) ist $A \subseteq G$ genau dann effektiv dicht, wenn A eine berechenbare dichte Teilmenge besitzt. Für effektiv dichte Teilmengen von G läßt sich Lemma (2.23) verbessern:

<u>Definition (2.26)</u> Seien A, $B \subseteq \omega$. A heißt <u>$\mathfrak{k}$-reduzierbar</u> auf B ($A \leq_\mathfrak{k} B$), wenn es ein $S \subseteq \omega$ aus Σ_2 mit $x \in A \iff \exists y\,(\langle x,y\rangle \in S \;\&\; D_y \subseteq B)$ gibt.

<u>$\mathfrak{k}$-Äquivalenz</u> und <u>$\mathfrak{k}$-Grade</u> definieren wir dann wie üblich durch $A \equiv_\mathfrak{k} B :\iff A \leq_\mathfrak{k} B \;\&\; B \leq_\mathfrak{k} A$. Aus der Definition der $\mathfrak{k}$-Reduzierbarkeit folgt, daß sie schwächer ist als die e-Reduzierbarkeit, d.h. $A \leq_e B \Rightarrow A \leq_\mathfrak{k} B$ und daß es einen kleinsten $\mathfrak{k}$-Grad gibt, der gerade die Mengen $A \in \Sigma_2$ umfaßt; es gilt nämlich $A \leq_\mathfrak{k} \emptyset \iff A \in \Sigma_2$. Wie zur e-Reduzierbarkeit (vgl. [9]) läßt sich auch zur $\mathfrak{k}$-Reduzierbarkeit ein Maschinenmodell angeben: $A \leq_\mathfrak{k} B$ gilt genau dann, wenn es eine Turingmaschine gibt, die, falls auf dem Eingabeband genau die Felder x mit $x \in B$ bedruckt werden, während der Eingabe mit der Rechnung beginnt und dabei auf dem Ausgabeband jedes Feld nur endlich oft bedruckt und löscht, so daß im Limes-Schritt genau die Felder x mit $x \in A$ bedruckt sind.

<u>Lemma (2.27)</u> Seien $A \subseteq G$ effektiv dicht, A eine γ-Beisielmenge von A und $B \subseteq \omega$ mit $A \leq_\mathfrak{k} B$. Dann besitzt A eine γ-Beispielmenge A' mit $A' \leq_\tau B$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage nur für den später benutzten Fall $A \in \Pi_1$ und $B \in \Sigma_1$ (vgl. Lemma (2.22)). Außerdem nehmen wir $F \subseteq A$ an.
Die in einer rekursiven Aufzählung von A^c nach t Schritten aufgezählte Teilmenge bezeichnen wir mit $[A^c]_t$ und definieren

$$R := \{(x,y,z) \mid (x \notin [A^c]_y \ \& \ kxy = z) \text{ oder } (x \in A^c \ \& \ z = 0)\} \ .$$

R ist eine r.a. Relation, zu der das Selection Theorem eine Funktion $g \in G^2$ liefert. Dann ist $\{\lambda ygxy \mid x < \omega\} = A$ und die Behauptung folgt aus Lemma (2.7).

Korollar (2.28) 1) Jede effektiv dichte Menge $A \subseteq G$ mit einer γ-Beispielmenge aus Σ_2 besitzt eine γ-Beispielmenge aus Δ_1.

2) Seien c eine Codierung von M und $A \subseteq M$ effektiv c-dicht und mit einer c-Beispielmenge aus Σ_2. Dann besitzt A eine c-Beispielmenge aus Δ_1.

Satz (2.29) 1) Sei $A \subseteq G$ effektiv dicht. Dann ist die Menge der c-Grade, in denen A eine γ-Beispielmenge besitzt, unter ℓ-Äquivalenz abgeschlossen.

2) Seien a und b verschiedene ℓ-Grade. Dann gibt es ein effektiv dichtes $A \subseteq G$, das nur in einem dieser ℓ-Grade eine γ-Beispielmenge besitzt.

Beweis: 1) Lemma (2.24), Lemma (2.27).

2) Analog zu Lemma (2.25) mit $A := \{\lambda xy \mid y \in A\} \pm F$ und der Beziehung $x \in A \iff \exists y \ (\exists z \ \forall z' > z \ \gamma y(z') = x \ \& \ y \in S)$.

2.7 Rekursivität von uniformen Räumen

Um für uniforme Räume Effektivitätsfragen zu klären, wählen wir den folgenden Weg: Wir betrachten numerierte und codierte Mengen (M,ν) bzw. (M,c) und eine Uniformität auf M vertreten durch eine abzählbare Basis $\mathcal{N} = (N_m)_{m<\omega}$. Rekursivitätsbegriffe für $(M,\mathcal{N},\nu)$ bzw. $(M,\mathcal{N},c)$ sollten dann neben Effektivitätseigenschaften von $\mathcal{N}$ auch die Effektivität der Beziehung zwischen $\mathcal{N}$ und ν bzw. c enthalten.

Definition (2.30) Seien $(A_m)_{m<\omega}$ und $(B_m)_{m<\omega}$ Folgen von Teilmengen von M. $(A_m)_{m<\omega}$ heißt effektiv feiner als $(B_m)_{m<\omega}$, wenn es ein $h \in$ mit $A_{hm} \subseteq B_m$ gibt ($(A_m)_{m<\omega} \leq^{\text{eff}} (B_m)_{m<\omega}$). Effektiv äquivalent ($\equiv^{\text{eff}}$) definieren wir dann wie üblich.

Nach dieser Definition liegt es nahe, von einer rekursiven Uniformitätsbasis $\mathcal{N}$ auf einer Menge M die Eigenschaften

$$\mathcal{N} \leq^{\text{eff}} (N_m \cap N_n)_{m,n<\omega}$$

$$(\bar{N}_m)_{m<\omega} \leq^{\text{eff}} \mathcal{N}$$

$$(N_m \circ N_m)_{m<\omega} \leq^{\text{eff}} \mathcal{N}$$

zu verlangen. Da eine solche Uniformitätsbasis stets zu einer Basis $\mathcal{N}'$ mit

$$\forall m\ \bar{N}'_m = N'_m$$

$$\forall m\ N'_{m+1} \circ N'_{m+1} \subseteq N'_m$$

effektiv äquivalent ist und dieser Begriff beweistechnisch bequemer zu handhaben ist, werden wir diesen Begriff künftig benutzen. Wir nennen eine solche Uniformitätsbasis auf M normiert. Analog gibt es zu jeder Cauchy-Folge $(a_n)_{n<\omega}$ auf einer normierten Uniformitätsbasis, die $(\{(a_n,a_{n'}) \mid n,n' > m\})_{m<\omega} \leq^{\text{eff}} \mathcal{N}$ erfüllt, eine normierte Cauchy-Folge $(b_n)_{n<\omega}$ mit $\forall m,n\ (b_m,b_{m+n}) \in N_m$, die denselben Limes hat und effektive Teilfolge von $(a_n)_{n<\omega}$ ist. Die Normiert-

heit verschärft den zuvor angedeuteten Effektivitätsbegriff jeweils in der Weise, daß von der dort betrachteten Funktion $h \in G$ die Form $\lambda x x+1$ verlangt wird. Entsprechend gilt das folgende Lemma.

Lemma (2.31) Seien $(N_m)_{m<\omega}$ eine normierte Uniformitätsbasis und $(a_n)_{n<\omega}$ und $(b_n)_{n<\omega}$ normierte Cauchy-Folgen. Dann gilt für die Konvergenz $\lim a_n = \lim b_n \Leftrightarrow \forall m\ (a_{m+2}, b_{m+2}) \in N_m$.

Definition (2.32) Seien (M,ν) eine numerierte Menge und $N = (N_m)_{m<\omega}$ eine normierte Uniformitätsbasis auf M .

1) Wir nennen N eine rekursive Uniformotätsbasis auf (M,ν) , wenn die Menge $\{(x,y,m) \mid (\nu x, \nu y) \in N_m\}$ rekursiv ist.
2) Eine Funktion $f : {}^nM \to M$ heißt effektiv gleichmäßig stetig, wenn $f(P^n N) \leq^{eff} N$ ist.
3) Eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n<\omega}$ heißt rekursiv, wenn sie eine r.a. Folge von (M,ν) und eine normierte Cauchy-Folge von (M,N) ist.

Sei N eine separierte rekursive Uniformitätsbasis auf (M,ν) . Da von einer endlichen Folge über M effektiv entschieden werden kann, ob die ein Anfangsstück einer rekursiven Cauchy-Folge ist, können wir mit Hilfe einer Funktion $h \quad G^2$, die zu jedem ν-Index eines Anfangssücks $(a_n)_{n<m}$ einer rekursiven Cauchy-Folge alle ν-Nummern von Elementen $a_m \in M$ aufzählt, für die $(a_n)_{n \leq m}$ Anfangsstück einer rekursiven Cauchy-Folge ist, eine natürliche Codierung c_0 aller rekursiven Cauchy-Folgen von (M,N,ν) definieren:

$$
\begin{aligned}
a^f_0 &:= \nu \cdot f(0) \\
a^f_{n+1} &:= \nu \cdot h(\langle \nu^{-1}(a_{n'})_{n'<n}\rangle^{\omega}, f(n+1)) \\
c_0 f &:= (a^f_n)_{n<\omega} \quad .
\end{aligned}
$$

c_0 ist durch die von h verlangten Eigenschaften bis auf Codierungsäquivalenz

eindeutig bestimmt. Sei $(\tilde{M},\tilde{N})$ die Vervollständigung von (M,N). Die rekursive Vervollständigung von (M,N,ν) definieren wir als die Menge $\hat{M}$ der Limites aller rekursiven Cauchy-Folgen von (M,N,ν) in $\tilde{M}$ versehen mit der normierten Uniformitätsbasis $\hat{N} := \tilde{N} \restriction \hat{M}$ und der induzierten Codierung c. Mittels Lemma (2.31) rechnet man sofort nach, daß in $(\hat{M},\hat{N},c)$ jede r.a. Folge von $(\hat{M},c)$, die eine normierte Cauchy-Folge von $(\hat{M},\hat{N})$ ist, konvergiert.

Wir werden die rekursive Vervollständigung axiomatisch und durch eine Invariante charakterisieren. Sind N eine Uniformitätsbasis auf M und $a \in M$, dann bezeichnen wir die zu N gehörende Basis $\{\{b \mid (a,b) \in N\} \mid N \in N\}$ des Umgebungsfilters von a mit N_a, und schreiben $N(a) := \{b \mid (a,b) \in N\}$ falls $N \in N$. Außerdem bezeichnen wir im Folgenden die kanonische Basis der natürlichen Uniformität auf G mit $U = (U_m)_{m<\omega}$, $U_m = \{(f,g) \mid \forall n > m\ fn = gn\}$. U ist eine normierte Uniformitätsbasis.

Definition (2.33) Seien (M,c) eine codierte Menge und $N = (N_m)_{m<\omega}$ eine normierte Uniformitätsbasis auf M.

1) (M,N,c) heißt schwach rekursiv, wenn es Folgen $(A_m)_{m<\omega}$ und $(B_m)_{m<\omega}$ von effektiv in m effektiv offenen Mengen mit $N \equiv^{\mathrm{eff}} (cA_m)_{m<\omega}$ und $(N_m^c)_{m<\omega} \equiv^{\mathrm{eff}} (cB_m)_{m<\omega}$ gibt.
2) (M,N,c) heißt streng rekursiv, wenn (M,N,c) schwach rekursiv ist und außerdem $N \leq^{\mathrm{eff}} cU$ gilt.

Definition (2.34) Seien (M,N,c) und (M',N',c') codierte uniforme Räume. (M,N,c) heißt rekursiv reduzierbar auf (M',N',c'), wenn es eine bijektive Abbildung $\varepsilon : M \to M'$ mit $\varepsilon N \leq^{\mathrm{eff}} N'$ und $\varepsilon \cdot c \leq c'$ gibt ($\leq^{\mathrm{rek}}$). Rekursiv Äquivalent ($\equiv^{\mathrm{rek}}$) definieren wir dann wie üblich.

Lemma (2.35) Seien (M,N) separiert und (M,N,ν) rekursiv. Dann ist die rekursive Vervollständigung $(\hat{M},\hat{N},c)$ von (M,N,ν) streng rekursiv.

Beweis: Der Beweis benutzt wieder die Normiertheitseigenschaften von rekursiven Uniformitäten und rekursiven Cauchy-Folgen. $(A_m)_{m<\omega}$ und $(B_m)_{m<\omega}$ geben wir nur an, und für den Nachweis von $N \leq^{eff} cU$ führen wir die im Prinzip gleiche Beweisidee etwas näher aus.

1) $A_m = \{(f,g) \mid (a^f_{m+2}, a^g_{m+2}) \in N_m\}$, $B_m = \{(f,g) \mid (a^f_{m+1}, a^g_{m+2}) \notin N_m\}$.

2) Seien $(a,b) \in \hat{N}_m$ und $(a_m)_{m<\omega}$ und $(b_m)_{m<\omega}$ rekursive Cauchy-Folgen auf (M,N,ν) mit $\lim a_m = a$ und $\lim b_m = b$. Dann ist $(a_{m+3}, b_{m+3}) \in N_m$ und die Folge $a' = (a_1,\ldots,a_{m+2},b_{m+3},\ldots)$ ist eine rekursive Cauchy-Folge mit b als Limes. In G lassen sich nun f und f' mit $cf = a$ und $cf' = a' = b$ finden. Es folgt $(a,b) \in cU_{m-1}$ und damit $N_{hm} \subseteq cU_m$ mit $h = \lambda xx+1$.

Lemma (2.36) Sei (M,N,c) schwach rekursiv. Dann ist $cU_f \leq^{eff} N_{cf}$ effektiv in f .

Beweis: Die schwache Rekursivität von (M,N,c) liefert zu $N_m(cf)$ effektiv in m und f ein $A_{m'}(f)$ mit $c(A_{m'}(f)) \subseteq N_m(cf)$ und die effektive Offenheit der $(A_m)_{m<\omega}$ ein $U_{m''}(f)$ mit $U_{m''}(f) \subseteq A_{m'}(f)$.

Lemma (2.37) Seien (M,c) und (M',c') codierte Mengen, und sei $A \subseteq M \cap M'$ effektiv c-dicht und effektiv c'-dicht. Außerdem seien N und N' separierte normierte Uniformitätsbasen auf M bzw. auf M' mit $cU_f \leq^{eff} N_{cf}$ effektiv in f , $N' \leq^{eff} cU$ und $N|A \leq^{eff} N'|A$. Dann ist $c \leq c'$.

Beweis: Sei $f \in G$. Dann gibt es eine r.a. Folge $(g_n)_{n<\omega}$ mit $g_n \in U_n(f)$ und $cg_n \in A$. Wegen der Stetigkeit von c ist $\lim cg_n = cf$. Außerdem ist

$(cg_n)_{n<\omega}$ eine rekursive Cauchy-Folge bezüglich $N'|A$ und $N'|A$. Wegen $N' \leq^{eff} cU$ gibt es schließlich eine rekursive Cauchy-Folge $(g'_n)_{n<\omega}$ von (G,U) mit $c'g'_n \in A$ und $\lim c'g'_n = cf$. Es folgt $cf = c'(ng'_n)$.

Satz (2.38) Seien (M,N) separiert, (M,N,ν) rekursiv und $(\hat{M},\hat{N},c)$ die rekursive Vervollständigung von (M,N,ν).

1) $(\hat{M},\hat{N},c)$ ist streng rekursiv, M effektiv c-dicht, und es gilt $\hat{N}|M \equiv^{eff} N$ und $\nu \leq c$.

2) Für jeden separierten streng rekursiven uniformen Raum (M',N',c') mit $M \subseteq M'$ effektiv c'-dicht, $N'|M \leq^{eff} N$ und $\nu \leq c'$ ist $(M',N',c') \leq^{rek} (\hat{M},\hat{N},c)$.

3) Für jeden separierten schwach rekursiven uniformen Raum (M',N',c') mit $M \subseteq M'$ effektiv c'-dicht, $N'|M \leq^{eff} \hat{N}$ und $\nu \leq c'$ ist $(M',N',c') \leq^{rek} (\hat{M},\hat{N},c)$.

Korollar (2.39) In einem streng rekursiven uniformen Raum (M,N,c) hat jede r.a. Folge von (M,c), die eine Cauchyfolge von (M,N) ist, einen Limes.

Ein Beispiel für einen separierten rekursiven uniformen Raum (M,N,ν) und eine schwach rekursive Codierung von $(\hat{M},\hat{N})$, die nicht streng rekursiv ist, sind die rationalen Zahlen versehen mit einer kanonischen Numerierung und der natürlichen Uniformitätsbasis und die Menge R der rekursiven reellen Zahlen versehen mit der Codierung, die der Darstellung durch gewöhnliche Dezimalbrüche entspricht. Der wesentliche Unterschied zwischen dieser und der mit Hilfe von Intervallschachtelungen definierten Codierung (vgl. §7), die streng rekursiv ist, liegt darin, daß hier die Menge $\{cf|\exists g \neq f\ cf = cg\}$ ein leeres Inneres hat. Es sei noch bemerkt, daß bezüglich dieser Codierung c von R die Funktionen $+$ und $\cdot$ nicht c-berechenbar sind (vgl. [14]).

Mit den bisher bewiesenen Mitteln erhält man leicht den folgenden Satz, der die rekursive Vervollständigung beschreibt und den wir später benötigen werden.

Satz (2.40) Seien (M,N) separiert ohne offene Punkte, (M,N,ν) rekursiv, $(\hat{M},\hat{N},c)$ die rekursive Vervollständigung von (M,N,ν), $f : {}^{n}M \to M$ die stetige Ergänzung einer ν-berechenbaren und effektiv gleichmäßig stetigen Funktion auf M, und sei op der Operator $a \to f^{-1}\{a\}$. Dann gilt:

a) $\nu \leq c$

b) Δ effektiv abgeschlossen

c) Δ^c effektiv c-dicht

d) M effektiv c-dicht

e) $(\hat{M},\hat{N},c)$ streng rekursiv

f) f c-berechenbar

g) op c-berechenbar .

Beweis: a) $\nu x = c(\lambda yx)$.

b) $cf = cg \iff \forall m\ (a^{f}_{m+2}, a^{g}_{m+2}) \in N_m$

c) Angenommen es gibt ein endliches Anfangsstück einer rekursiven Cauchy-Folge, dessen sämtliche Fortsetzungen denselben Limes haben, dann hat (M,N) offene Punkte. Widerspruch.

d) Zu jedem Anfangsstück einer rekursiven Cauchy-Folge liegt der Limes einer fast überall konstanten Fortsetzung in M.

e) Lemma (2.35).

f,g) Seien $a \in M$ und $(a_n)_{n<\omega}$ eine rekursive Cauchy-Folge mit a als Limes. Dann liefert die Beziehung $N \leq^{\text{eff}} cU$ die Existenz einer Teilfolge von $(fa_n)_{n<\omega}$, die rekursive Cauchy-Folge ist und deren Limes wegen der gleichmäßigen Stetigkeit gleich fa ist.

§ 3 Matroide

3.1 Grundbegriffe der Matroidtheorie I

Definition (3.1) Ein Matroid besteht aus einer Menge M und einem Operator $cl : \mathcal{P}M \to \mathcal{P}M$ mit $\forall b(cl) = \mathcal{P}M$, der die folgenden Axiome erfüllt:

a) $A \subseteq clA$

b) $A \subseteq B \Rightarrow clA \subseteq clB$

c) $cl(clA)) = clA$

d) $x \in clA \Rightarrow \exists A' \in P_\omega A \; x \in clA'$

e) $x \in cl(A \cup \{v\}) - clA \Rightarrow v \in cl(A \cup \{x\})$.

Einen Operator, der die Axiome (a) bis (c) erfüllt, nennen wir Hüllenoperator; (c) beschreibt dabei die Transitivität von cl. Ein Operator, der Axiom (d) erfüllt, heißt algebraisch oder kompakt. Und Axiom (e) ist die Austausch-Eigenschaft. Den Operator eines Matroids nennen wir Abschluß-Operator. Ist cl ein Hüllenoperator auf M, dann nennen wir eine Menge $A \subseteq M$ mit $clA = A$ cl-abgeschlossen und bezeichnen das System der cl-abgeschlossenen Mengen mit $\mathcal{C}$. Mit den Operationen $\lambda XY.\, X \cap Y$ und $\lambda XY.\, cl(X \cup Y)$ ist $\mathcal{C}$ ein Verband. Das System $\mathcal{C}$ enthält genügend Information über (M,cl), um den Abschluß-Operator zu definieren: $clX = \bigcap \{A \in \mathcal{C} \mid X \subseteq A\}$.

Zu einem Hüllenoperator cl über M und $A \subseteq M$ betrachten wir die Relationen

$$x \leq_A y \;:\Leftrightarrow\; x \in cl(A \cup \{v\})$$

$$x \sim_A y \;:\Leftrightarrow\; x \leq_A y \;\&\; y \leq_A x \quad .$$

Offenbar sind $\leq_A$ eine Quasihalbordnung und $\sim_A$ eine Äquivalenzrelation. Im Falle eines Matroides nennen wir sie Abschluß-Äquivalenzrelation. Mit einer Einschränkung, die sich später auf eine Reihe von Rekursivitätsüberlegungen auswir-

ken wird, ist auch die Familie der Abschluß-Äquivalenzrelationen eines Matroides stark genug, um den Abschluß-Operator zu definieren:

Lemma (3.2) 1) Seien (M,cl) ein Matroid mit $C \neq \{\emptyset,M\}$ und $X \subseteq M$ nicht leer. Dann ist $clX = \{a \mid \exists b \in X\ a \sim_X b\}$ und $cl\emptyset = \cap \{clX \mid X \subseteq M \ \&\ X \neq \emptyset\}$.
2) Für die Matroide mit $C = \{\emptyset,M\}$ und $C = \{M\}$ stimmen die Familien der Abschluß-Äquivalenzrelationen jeweils überein.

Beispiele für Matroide sind viele der in der Algebra beim Lösen von Gleichungen auftretenden Abschlüsse, so der relativ algebraische Abschluß ac von Körpern und der Abschluß lc einer Teilmenge eines Vektorraumes als Unterstruktur. Daneben erwähnen wir noch das triviale Beispiel $(M,Id \mid PM)$ für eine beliebige Menge M. Wir nennen es das freie Matroid auf M. Weitere Beispiele liefert das folgende Lemma.

Lemma (3.3) Seien (M,cl), (M_0,cl_0) und (M_1,cl_1) Matroide und $A \subseteq M$.
1) $(M_0 \cup M_1, \lambda X(cl_0(X \cap M_0) \cup cl_1(X \cap M_1)))$ ist ein Matroid.
2) $(M,\lambda X cl(X \cup A))$ ist ein Matroid.
3) $(A,\lambda X(clX \cap A))$ ist ein Matroid.

$(M_0 \cup M_1, \lambda X(cl_0(X \cap M_0) \cup cl_1(X \cap M_1)))$ heißt das Produkt von (M_0,cl_0) und (M_1,cl_1). $\lambda X cl(X \cup A)$ bezeichnen wir mit cl_A und nennen cl_A die Kontraktion von cl nach A. Oft wird in der Literatur anstelle von (M,cl_A) das Matroid $(M - A, \lambda X(cl(X \cup A) - A))$ betrachtet. Wir ziehen jedoch (M,cl_A) vor, da es für rekursionstheoretische Überlegungen günstiger ist, wenn beim Übergang $cl \to cl_A$ der Definitionsbereich nicht die Komplexität von A^c annimmt. $\lambda X(clX \cap A)$ bezeichnen wir mit $cl \mid A$ und nennen $cl \mid A$ die Einschränkung von cl auf A. Für abgeschlossene $A \subseteq M$ ist $(A,cl \mid A)$ Untermatroid im üblichen

Sinn. Im Allgemeinen gilt jedoch nur $C(\cdot 1) \circ PA \subseteq C(c 1 A)$.

3.2 Grundbegriffe der Matroidtheorie II

Ist (M,cl) ein Matroid, dann heißt eine Menge $A \subseteq M$ cl-unabhängig, wenn jedes $x \in A$ nicht in $cl(A - (x))$ liegt. Weiter heißt für A, $B \subseteq M$ die Menge B eine cl-Basis von A, wenn B cl-unabhängig ist und $A = clB$ gilt. $A \subseteq M$ heißt total cl-abhängig, wenn jedes $x \in A$ in $cl(A - (x))$ liegt. Alle minimalen cl-abhängigen Mengen sind aufgrund der Austausch-Eigenschaft total cl-abhängig. Diese Mengen nennen wir Kreise. Da die leere Menge cl-unabhängig ist, sind alle einelementigen cl-abhängigen Mengen Kreise. Dies sind genau die Einermengen von $cl\emptyset$. Ein Matroid ist jeweils durch die Familie der cl-abhängigen, der total cl-abhängigen Mengen und der Kreise eindeutig bestimmt. In [1] finden sich Axiomensysteme für die Familie der cl-unabhängigen Mengen und für die Familie der Kreise eines Matroids.

Lemma (3.4) (Austausch-Lemma) Seien (M,cl) ein Matroid, $A \subseteq M$ mit $clA = M$ und $B \subseteq M$ cl unabhängig. Dann gibt es eine Menge $A' \subseteq A$, so daß $A' \cup B$ eine cl-Basis von M ist.

Lemma (3.5) Seien (M,cl) ein Matroid und $A \subseteq M$ cl-abgeschlossen. Dann haben je zwei Basen von A dieselbe Mächtigkeit.

Die nach Lemma (3.5) eindeutig bestimmte Mächtigkeit einer Basis von A nennen wir die Dimension oder den Rang von A ($r(A)$).

Lemma (3.6) Seien (M,cl) ein Matroid, $A \subseteq M$ cl-abgeschlossen, B eine cl-Basis von A und B' eine cl_A-Basis von M. Mit A' bezeichnen wir die Menge clB'. Dann sind B eine $cl_{A'}$-Basis von M und $B \cup B'$ eine cl-Basis von M.

Definition (3.7) Seien (M,cl) ein Matroid und $A, B \subseteq M$ cl-abgeschlossen. B heißt unabhängiges Komplement von A, wenn $cl(A \cup B) = M$ gilt, und wenn jede cl-Basis von B cl_A-unabhängig ist.

Nach Lemma (3.6) ist diese Definition in A und B symmetrisch, ist ein unabhängiges Komplement ein verbandstheoretisches und haben je zwei unabhängige Komplemente eines $A \subseteq M$ dieselbe Dimension. Ein Beispiel aus der Körpertheorie dafür, daß die verbandstheoretischen Komplemente verschiedene Dimension haben können, ist in [6] angegeben. Isomorph sind die unabhängigen Komplemente eines $A \subseteq M$ im Allgemeinen nicht. Als Beispiel diene $C = \{0,1,\{1\},\{2,3\},4\}$.

Sei (M,cl) ein Matroid. Eine cl-abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ heißt regulär, wenn A keine Vereinigung von endlich vielen cl-abgeschlossenen echten Teilmengen von A ist, und (M,cl) heißt regulär, wenn M regulär ist. Der relativ algebraische Abschluß auf einem Körper ist regulär, und der Abschluß einer Teilmenge eines Vektorraumes als Unterstruktur ist genau dann regulär, wenn der Körper des Vektorraumes unendlich ist. Den Begriff der Regularität werden wir später nur insoweit benötigen, als er für einige der später benutzten Bedingungen hinreichend ist. In diesem Zusammenhang sei das folgende Lemma, das die Regularität mit Hilfe der Abschluß-Äquivalenzrelation beschreibt, angeführt.

Lemma (3.8) Seien (M,cl) ein Matroid und $A \subseteq M$ cl-abgeschlossen. Dann sind äquivalent:

(i) A ist regulär.

(ii) Jede 2-dimensionale cl-abgeschlossene Teilmenge von A ist regulär.

(iii) Für $B \subseteq A$ ist $A - clB$ leer oder es zerfällt unter $\sim_B$ nicht oder in unendlich viele Äquivalenzklassen.

(iv) Jede 2-dimensionale cl-abgeschlossene Teilmenge von A zerfällt unter

$\sim_\emptyset$ in unendlich viele Äquivalenzklassen.

Beweis: Da für $B \subseteq A$ jede Äquivalenzklasse von $\sim_B$ entweder ganz in oder ganz außerhalb von A liegt, sind die Aussagen (iii) und (iv) wohldefiniert.

(ii) => (i): s. [6].

(i) => (iii): Annahme: Es gibt ein n mit $2 \leq n < \omega$, so daß $A - clB$ unter $\sim_B$ in genau n verschiedene Äquivalenzklassen $K_0, \ldots, K_{n-1}$ zerfällt. Dann gibt es $a_0, \ldots, a_{n-1}$ mit $K_i = cl(B \cup \{a_i\}) - clB$, und A besitzt die Darstellung $A = clB \cup \bigcup (K_i \mid i < n) = \bigcup (cl(B \cup \{a_i\}) \mid i < n)$. Widerspruch.

(iii) => (iv): Sei $cl\{a,b\} \subseteq A$ 2-dimensional. Dann zerfällt $cl\{a,b\}$ unter $\sim_\emptyset$ mindestens in die Äquivalenzklassen $cl\{a\} - cl\emptyset$ und $cl\{b\} - cl\emptyset$ und damit in unendlich viele Äquivalenzklassen.

(iv) => (ii): Annahme: Es gibt ein $B \subseteq A$ cl-abgeschlossen, 2-dimensional und nicht regulär. Dann gibt es ein $n < \omega$ und $a_0, \ldots, a_{n-1}$ mit $A = \bigcup (cl\{a_i\} \mid i < n)$, und in der Familie $\{cl\emptyset\} \cup \{cl\{a_i\} - cl\emptyset \mid i < n\}$ sind alle Äquivalenzklassen von $\sim_\emptyset$ in B enthalten. Widerspruch.

Ein Hüllenoperator cl heißt <u>quasifrei</u>, wenn $cl(A \cup B) = clA \cup clB$ ist. Für einen quasifreien Hüllenoperator ist $\mathfrak{C} \cup \{\emptyset\}$ das System der abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Für diese Topologie gilt: $cl\emptyset$ ist leer oder eine minimale abgeschlossene Menge, und $M - cl\emptyset$ zerfällt in Zusammenhangskomponenten, auf denen die Spurtopologie die indiskrete ist. Diese Zusammenhangskomponenten sind gerade die Äquivalenzklassen von $\sim_\emptyset$ ohne die Klasse $cl\emptyset$. Umgekehrt liefert jede Äquivalenzrelation $\sim$ und jede Äquivalenzklasse A von $\sim$ mit $\lambda X\ (a \mid b \in X \cup A\ a \sim b)$ einen Abschluß-Operator. Durch diese Beschreibung werden quasifreie Matroide als extreme Beispiele für nicht reguläre Matroide charakterisiert.

Als Beispiel für ein quasifreies Matroid führen wir (G,fc) ein:

$$g \in fcA \;:\Leftrightarrow\; \exists f \in A\, \exists x \in \omega\, \forall y > x\; fy = gy \quad .$$

(G,fc) ist unendlichdimensional, $fc\emptyset$ ist leer und die Äquivalenzklassen von $\sim_\emptyset$ haben die Form $g + F$. Die Topologie des Abschluß-Operators fc auf G ist verschieden von der natürlichen Topologie $\mathcal{T}_G$ auf G. $f, g \in G$ liegen in $\mathcal{T}_G$ nahe beieinander, wenn sie ein möglichst langes Anfangsstück gemeinsam haben, in der Topologie von fc dagegen, wenn sie ein Endstück gemeinsam haben. Die abgeschlossenen Mengen der einen Topologie liegen jeweils dicht in der anderen Topologie.

Im Blick auf die später betrachteten Beispiele von Matroiden mit einer natürlichen Topologie ist es nützlich, das eben über (G,fc) Gesagte und eine Abschwächung davon als Begriffe festzuhalten:

Definition (3.9) Seien (M,cl) ein Matroid und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G.

1) $\mathcal{T}$ und cl heißen verträglich, wenn jede $\sim_\emptyset$-Äquivalenzklasse von cl dicht in $\mathcal{T}$ liegt

2) $\mathcal{T}$ und cl heißen schwach verträglich, wenn $A \in \mathcal{T} \Rightarrow clA = M$ gilt.

Auf weitergehende Begriffsbildungen über den Zusammenhang zwischen $\mathcal{T}$ und cl wie z.B. die Stetigkeit von cl, wollen wir verzichten. Andere Beispiele als (G,fc) für Matroide, die mit einer natürlichen Topologie versehen sind, die mit dem Abschluß-Operator verträglich ist, sind die komplexen, die reellen und die p-adischen Zahlen jeweils versehen mit dem relativ algebraischen Abschluß. Für topologische Vektorräume wie z.B. für den $\mathbb{R}^n$ ist der Abschluß als Untervektorraum mit der Topologie im Allgemeinen nur schwach verträglich.

3.3 Definition von X , Y , Z , I , J , cl' und cl^+

Wegen der Kompaktheit eines Abschluß-Operators cl sind die Familien der cl-abhängigen und der total cl-abhängigen Mengen durch die Familien der jeweiligen endlichen Mengen eindeutig bestimmt und alle Kreise endlich. Diese Tatsache ist insofern interessant, als diese Familien Teilmengen von $M^{O,1}$ sind, und sich damit für rekursionstheoretische Untersuchungen der in §2 entwickelte Begriffsapparat anwenden läßt. Die Familie der endlichen cl-abhängigen Mengen des Matroids (M,cl) werden wir mit X , die der total cl-abhängigen Mengen von (M,cl) mit Y und die der Kreise von (M,cl) mit Z bezeichnen.

Als weitere Teilmengen von $M^{m,n}$, die das Matroid (M,cl) aufgrund der Kompaktheit von cl charakterisieren und die wir später rekursionstheoretisch untersuchen werden, führen wir I und J ein:

$$I := \{(a,D) \in M^{1,1} \mid a \in clD\}$$

$$J := \{(a,b,D) \in M^{2,1} \mid a \sim_D b\} \quad .$$

Außerdem definieren wir auf dem Matroid (M,cl) die Operatoren cl' und cl^+ :

$$cl' : M^{1,1} \to PM$$

$$(a,D) \to \begin{cases} cl(D \cup \{a\}) - clD & \{a\}\ cl_D\text{-unabhängig} \\ clD & \text{sonst} \end{cases}$$

$$cl^+ : M^{O,1} \to PM$$

$$D \to \begin{cases} \emptyset & D = \emptyset \\ clD - \bigcup \{clE \mid E \subseteq D\} & D \neq \emptyset \ \text{cl-unabhängig} \\ clD & \text{sonst} \quad . \end{cases}$$

Zwischen J und cl' besteht der Zusammenhang $(a,b,D) \in J \Leftrightarrow a \in cl'(b,D)$ und $cl'(a,D) = \{b \mid a \sim_D b\}$. Nach Lemma (3.2) bestimmen J und damit auch cl'

das Matroid (M,cl) nicht eindeutig. Eindeutig bestimmt wird (M,cl) dagegen durch $cl^+ : clA = \bigcup \{cl^+D \mid D \in P_\omega A\}$. Ist (M,cl) regulär, und gilt $cl\emptyset \neq \emptyset$, dann ist für jedes $A \in P_\omega M$ die Menge cl^+A nicht leer. Diese Bedingung ist jedoch echt schwächer als die Regularität. So wird sie z.B. auch von Vektorräumen über endlichen Körpern erfüllt.

3.4 Erweiterungstheorie, Amalgamierungseigenschaft

Die folgenden Ergebnisse über Matroiderweiterungen formulieren wir zunächst nur für endliche Matroide. Der Kompaktheitssatz der Modelltheorie liefert dann aus Satz (3.12) die Korollare (3.16) und (3.17) für die Klasse aller Matroide. Für die Anwendung des Kompaktheitssatzes legen wir die Sprache zugrunde, in der sich für jedes $n < \omega$ die Relation $a_0 \in cl\{a_1,\dots,a_n\}$ durch ein n+1-stelliges Prädikat ausdrücken läßt.

Lemma (3.10) 1) Seien (M,cl) ein endliches Matroid und A, $B \subseteq M$. Dann gilt:

a) $rA \leq |A|$

b) $A \subseteq B \Rightarrow rA \leq rB$

c) $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq rA + rB$.

2) Sei M eine endliche Menge, und $r : \mathcal{P}M \to \omega$ erfülle die Axiome (1a) bis (1c). Dann ist $\lambda X\,\{a \in M \mid r(X \cup \{a\}) = rX\}$ ein Abschluß-Operator auf M.

3) Die durch (1) und (2) gegebenen Zuordnungen zwischen endlichen Matroiden und Rangfunktionen sind bijektiv und zueinander invers.

Definition (3.11) 1) In einem endlichen Matroid (M,cl) heißen zwei Mengen A, $B \subseteq M$ mit $r(A \cup B) + r(A \cap B) = rA + rB$ ein modulares Paar.

2) Ein modularer Filter des endlichen Matroids (M,cl) ist ein System $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}M$, das unter Obermengen und Durchschnitten von modularen Paaren abgeschlossen ist.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß A und B genau dann ein modulares Paar bilden, wenn jede $cl_{A\cap B}$-unabhängige Menge $D \subseteq A$ cl_B-unabhängig ist. Für Komplemente A, $B \in C$ bedeutet das, daß A genau dann ein unabhängiges Komplement

von B ist, wenn A und B ein modulares Paar bilden.

Satz (3.12) Seien (M,cl) ein endliches Matroid und $p, q \notin M$.

1) Zu jedem $a \in M$ ist $\{A \subseteq M - \{a\} \mid a \in clA\}$ ein modularer Filter auf $(M - \{a\}, cl \mid M - \{a\})$.

2) Zu jedem modularen Filter M auf (M,cl) gibt es genau einen Abschluß-Operator op auf $M \cup \{p\}$ mit $op \mid M = cl$ und $\forall A \in C\ (A \in M \Leftrightarrow p \in opA)$.

3) Zu je zwei modularen Filtern M_p und M_q auf (M,cl) gibt es einen Abschluß-Operator op auf $M \cup \{p,q\}$ mit $op \mid M = cl$, $\forall A \in C\ (A \in M_p \Leftrightarrow p \in opA)$ und $\forall A \in C\ (A \in M_q \Leftrightarrow q \in opA)$.

Beweise für (1) und (2) finden sich in [1]. Mit derselben Methode läßt sich auch (3) beweisen. Dazu definiert man eine Fuktion $\hat{r} : P_\omega(M \cup \{p,q\}) \to \omega$ z.B. durch

$$\hat{r}A = rA$$

$$\hat{r}(A \cup \{p\}) = \begin{cases} rA & clA \in M_p \\ rA+1 & clA \notin M_p \end{cases}$$

$$\hat{r}(A \cup \{q\}) = \begin{cases} rA & clA \in M_q \\ rA+1 & clA \notin M_q \end{cases}$$

$$\hat{r}(A \cup \{p,q\}) = \begin{cases} rA & clA \in M_p \cap M_q \\ rA+1 & clA \in (M_p \cup M_q) - (M_p \cap M_q) \\ rA+1 & clA \notin M_p \cup M_q \ \&\ \exists a\ cl(A \cup \{a\}) \in M_p \cap M_q \\ rA+2 & cl A \notin M_p \cup M_q \ \&\ \forall a\ cl(A \cup \{a\}) \notin M_p \cap M_q \end{cases}.$$

Dabei seien $A \subseteq M$ und $a \in M$. Dann rechnet man für $\hat{r}$ die Rangaxiome von Lemma (3.10) nach und zeigt, daß der nach Lemma (3,10) $\hat{r}$ eindeutig zugeordnete Abschluß-Operator op auf $M \cup \{p,q\}$ das Verlangte leistet. Als Beispiel für die Nichteindeutigkeit von op im Fall (3) mag das freie Matroid auf $M = 2$ mit den Filtern $M_p = M_q = \{2\}$ und den beiden Möglichkeiten $p \in op_0\{q\}$ und

$p \in op_1\{q\}$ dienen.

Mit Satz (3.12.2) ist es möglich, Schritt für Schritt alle endlichen und im Prinzip (d.h. nicht effektiv) alle abzählbaren Matroide zu konstruieren, und Satz (3.12.3) liefert den Induktionsschritt, um für die Klasse der endlichen Matroide die Amalgamierungseigenschaft zu beweisen. Die Amalgamierungseigenschaft besagt, daß zu Strukturen A, B und C, für die $A \subseteq B$ und $A \subseteq C$ Einbettungen sind, eine gemeinsame Erweiterungsstruktur D existiert. (D.h.: $A \subseteq B \subseteq D$ und $A \subseteq C \subseteq D$ sind Einbettungen.) Mit dem Kompaktheitssatz der Modelltheorie beweist man daraus das folgende Korollar.

Korollar (3.13) Die Klasse aller Matroide hat die Amalgamierungseigenschaft.

Die Amalgamierungseigenschaft und die Konstruktion von Satz (3.12) legen es nahe, die Theorie T zu betrachten, die besagt, daß jedes Modell von T ein Matroid (M,cl) ist, in dem zu jeder endlichen Teilmenge $D \subseteq M$ und zu jedem modularen Filter $\mathcal{M}$ auf D ein $p \in M$ existiert, das $\mathcal{M}$ erfüllt. Aufgrund der Amalgamierungseigenschaft ist T widerspruchsfrei.

Korollar (3.14) Sei T die oben beschriebene Theorie.

1) In jedes Modell von T können alle abzählbaren Matroide eingebettet werden.
2) T ist ω-kategorisch, erlaubt die Quantorenelimination und ist entscheidbar.
3) Das abzählbare Modell von T ist im Sinne von [4,III] streng rekursiv. Insbesondere ist es ein rekursives Matroid im Sinne von Definition (4.1).

§ 4 Numerierte Matroide

4.1 Rekursive und semirekursive Matroide

Definition (4.1) Seien (M,cl) ein Matroid und ν eine Numerierung von M mit entscheidbarem Wortproblem.

1) (M,cl,ν) heißt semirekursiv, wenn $\{(x,y) \mid \nu x \in cl(\nu D_y)\}$ r.a. ist.

2) (M,cl,ν) heißt rekursiv, wenn $\{(x,y) \mid \nu x \in cl(\nu D_y)\}$ rekursiv ist.

Beispiele für semirekursive Matroide sind rekursive Körper (vgl. §7) versehen mit dem relativ algebraischen Abschluß und rekursive Vektorräume (vgl. §8) versehen mit dem Abschluß als Unterstruktur. Nach Satz (4.6) sind sie genau dann rekursiv, wenn sie eine rekursive Basis haben. Beispiele für rekursive Körper und Vektorräume mit und ohne rekursive Basis finden sich bei Metakides und Nerode (vgl. [5]).

Semirekursivität bzw. Rekursivität von numerierten Matroiden haben wir dadurch definiert, daß wir neben der Entscheidbarkeit des Wortproblems die rekursive Aufzählbarkeit bzw. die Rekursivität von I verlangt haben. Wir werden jetzt untersuchen, wie sich für ein numeriertes Matroid mit entscheidbarem Wortproblem die Rekursivitätseigenschaften der Mengen I, J, X, Y und Z und der Operatoren $cl|P_\omega M$, cl' und cl^+ zueinander verhalten. Dabei werden wir eine Reihe von zur Semirekursivität bzw. zur Rekursivität äquivalenten Bedingungen angeben können, die wir später stillschweigend als äquivalent benutzen werden.

Lemma (4.2) Seien (M,cl) ein Matroid und ν eine Numerierung von M mit entscheidbarem Wortproblem. Dann gilt:

a) $I \in \Delta_1 \iff J \in \Delta_1 \iff X \in \Delta_1 \iff Y \in \Delta_1 \iff Z \in \Delta_1$

b) $I \in \Sigma_1 \iff J \in \Sigma_1 \iff X \in \Sigma_1$

c) $Z \in \Sigma_1 \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} Y \in \Sigma_1 \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} X \in \Sigma_1$.

Beweis: S. Satz (4.11).

Lemma (4.3) 1) Seien (M,cl) ein reguläres Matroid und ν eine Numerierung von M mit entscheidbarem Wortproblem. Dann gilt $Z \in \Sigma_1 \iff Z \in \Delta_1$.

2) Es gibt ein Matroid (M,cl) und eine Numerierung ν von M mit entscheidbarem Wortproblem und mit $Z \in \Sigma_1 - \Delta_1$.

Beweis: 1) $D \notin Z \iff \exists E \in Z\ (E \subset D$ oder $D \subset E)$.

2) Seien $S \subseteq \omega$ aus $\Sigma_1 - \Delta_1$ und $(M,\nu) := (\omega, Id)$. Dann liefert $Z := \{(\frac{n}{2}(n+1),\ldots,\frac{n+1}{2}(n+2)-1) \mid n \in S\}$ sogar ein von ν unabhängiges Beispiel.

Lemma (4.4) Seien (M,cl) ein Matroid und ν eine Numerierung von M mit entscheidbarem Wortproblem. Dann sind Äquivalent:

(i) I r.a.

(ii) cl ν-berechenbar

(iii) cl' ν-berechenbar

(iv) cl^+ ν-berechenbar .

Beweis: Nach dem s-m-n-Theorem ist ein Operator $op : M^{m,n} \to PM$ genau dann ν-berechenbar, wenn die Menge $\{(a,b_0,\ldots,b_{m-1},D_0,\ldots,D_{n-1}) \mid a \in op(b_0,\ldots,D_{n-1})\}$ r.a. ist. Damit folgt die Behauptung aus den Beziehungen

$a \in cl D \iff (a,D) \in I$

$a \in cl'(b,D) \iff (a,b,D) \in J$

$a \in cl^+ D \iff (a,D) \in I \ \&\ (D \notin X \Longrightarrow D \cup \{a\} \in Y)$

$a \in cl D \iff \exists E \subseteq D\ a \in cl^+ E$.

4.2 Rekursivität von Basen

Seien (M,cl) ein Matroid und ν eine Numerierung von M. Dann ist die Menge $\nu\{x < \omega \mid \nu x \notin cl\{\nu x' \mid x' < x\}\}$ eine Basis von (M,cl). Wir nennen sie die Standardbasis von (M,cl,ν). Aus dieser Definition folgt sofort das folgende Lemma.

Lemma (4.5) In einem semirekursiven Matroid ist die Standardbasis aus Π_1.

Satz (4.6) Sei (M,cl,ν) ein semirekursives Matroid. Dann sind äquivalent:

(i) (M,cl,ν) ist rekursiv.

(ii) (M,cl,ν) besitzt eine r.a. Basis.

(iii) Die Standardbasis von (M,cl,ν) ist r.a.

Beweis: Wir zeigen nur (ii) => (i).
Sei B eine r.a. Basis von (M,cl,ν). Dann folgt die Behauptung aus
$D \in X^c \iff \exists E,E' \in P_\omega B(E \subseteq E' \;\&\; |E| = |D| \;\&\; \forall b \in E\, b \in cl((E' - E) \cup D))$.

Korollar (4.7) Für endlichdimensionale Matroide sind die Eigenschaften rekursiv und semirekursiv äquivalent.

Lemma (4.8) Seien (M,cl,ν) ein rekursives Matroid und $B \subseteq M$ eine rekursive Basis von M. Dann gibt es eine zu ν äquivalente Numerierung ν' von M, so daß (M,cl,ν') rekursiv und B die Standardbasis von (M,cl,ν') ist.

Beweis: S. [6].

4.3 Einbettungssatz

Lemma (4.9) 1) Seien (M,cl,ν) semirekursiv (rekursiv) und $\nu' \equiv \nu$. Dann ist (M,cl,ν') semirekursiv (rekursiv).

2) Seien (M_0,cl_0,ν_0) und (M_1,cl_1,ν_1) semirekursive (rekursive) Matroide mit $M_0 \cap M_1 = \emptyset$. dann gibt es eine semirekursive (rekursive) Numerierung ν' des Produkts von (M_0,cl_0) und (M_1,cl_1) mit $\nu_0 \leq \nu'$ und $\nu_1 \leq \nu'$.

3) Seien (M,cl,ν) semirekursiv (rekursiv) und $A \subseteq M$ r.a. Dann ist (M,cl_A,ν) semirekursiv.

4) Seien (M,cl,ν) semirekursiv (rekursiv) und $A \subseteq M$ r.a. Dann gibt es eine semirekursive (rekursive) Numerierung ν' von $(A,cl|A)$ mit $\nu' \leq \nu$.

Beweis: 1) Nach Lemma (2.3.3).

2) Die durch $\nu'(2x) = \nu_0 x$ und $\nu'(2x+1) = \nu_1 x$ definierte Numerierung von $M_0 \cup M_1$ leistet offenbar das Verlangte.

3) $a \in cl_A D \iff \exists E \in P_\omega A\ a \in cl(D \cup E)$.

4) $s \in G$ sei injektiv und zähle $\nu^{-1}A$ auf. Dann ist $\nu' := \nu \cdot s$ eine geeignete Numerierung von $(A,cl|A)$.

Nach Lemma (4.9.3) liefert die Kontraktion eines rekursiven Matroids nach einer rekursiven Menge ein semirekursives Matroid. Der folgende Satz besagt, daß jedes semirekursive Matroid auf diese Weise erhalten werden kann.

Satz (4.10) Sei (M,cl,ν) ein semirekursives Matroid. Dann gibt es ein rekursives Matroid (U,op,η), eine rekursive Menge $A \subseteq U$ und eine rekursive Einbettung ε von (M,cl,ν) in (U,op_A,η) mit $M = U - A$.

Beweis: 1) Konstruktion von U, op, A, η und ε.

Seien (I_t) eine bijektive rekursive Aufzählung von $I(M,cl,v)$ und $(a_t)_{t<\omega}$ eine bijektive Aufzählung einer Menge A mit $M \cap A = \emptyset$. Wir setzen $U := M \cup A$ und definieren op induktiv durch eine Folge $(op_n)_{n<\omega}$ von Operatoren auf U:

$$op_0 D := D$$

$$op_{n+1} D := \{x \in M \mid \exists a_t \in A \cap op_n D \; \exists E \subseteq M \cap op_n D \; (x,E) \in I_t\}$$
$$\cup \{a_t \in A \mid \exists x \in M \cap op_n D \; \exists E \subseteq M \cap op_n D \; (x,E) \in I_t\}$$

$$opD := \cup \{op_n D \mid n < \omega\} .$$

Die Numerierung n von U definieren wir durch $n(2x) := vx$ und $n(2x+1) := a_x$, und die Einbettung ε sei die Identität $Id|M$.

2) Wir zeigen nur die Rekursivität von op. Dazu genügt es, effektiv eine endliche obere Schranke für $M \cap opD$ anzugeben.

Sei $x \in op_{n+1} D - op_n D$ für ein $n < \omega$. Dann gibt es ein $a_t \in A \cap op_n D$ und ein $E \subseteq M \cap op_n D$ mit $(x,E) \in I_t$. Angenommen $a_t \notin D$. Dann ist $a_t \in op_{m+1} D - op_m D$ für ein $m < \omega$, und wegen der eindeutigen Zuordnung $a \mapsto x$ ist $x \in op_m D \subseteq op_n D$. Widerspruch. Also ist $a \in D$ und es folgt $x \in \{y \mid \exists a_t \in A \cap D \; \exists E \subseteq M \; (y,E) \in I_t\}$. Damit ist die endliche Menge $D \cup \{y \mid \exists a_t \in A \cap D \; \exists E \subseteq M \; (y,E) \in I_t\}$ eine geeignete Schranke für $M \cap opD$.

Satz (4.10) ist ein für die Fragestellungen der rekursiven Algebra typisches Ergebnis. Er führt das Studium der semirekursiven Matroide auf das der rekursiven Teilmengen von rekursiven Matroiden zurück. Entsprechende Sätze für Vektorräume über unendlichen Körpern und für Körper als Faktorisierung von Ringen haben Metakides und Nerode bewiesen. (vgl. [5])

4.4 Beweis von Lemma (4.2)

Für den Beweis von Lemma (4.2) benutzen wir zwei Sätze, die über das zum Beweis Benötigte hinausgehen und auch für sich von Interesse sind. Dazu seien $(M,c1)$ ein Matroid und ν eine Numerierung von M mit entscheidbarem Wortproblem. Die ν-Urbilder von I, J, X, Y und Z bezeichnen wir mit I, J, X, Y und Z. Außerdem definieren wir für $n < \omega$:

$$I_n := \{\langle x,y\rangle \mid |D_y| \leq n \;\&\; (\nu x, \nu D_y) \in I\}$$

$$J_n := \{\langle x,y,z\rangle \mid |D_z| \leq n \;\&\; (\nu x, \nu y, \nu D_z) \in J\}$$

$$X_n := \{x \mid |D_x| \leq n+1 \;\&\; \nu D_x \in X\}$$

$$Y_n := \{x \mid |D_x| \leq n+1 \;\&\; \nu D_x \in Y\}$$

$$Z_n := \{x \mid |D_x| \leq n+1 \;\&\; \nu D_x \in Z\} \quad .$$

Der folgende Satz ist vollständig im Blick auf die betrachteten Mengen und die verwendeten Reduzierbarkeiten.

Satz (4.11)

1a)	X_n	$\leq_m$	X_{n+1}
b)	X_{n+1}	$\not\leq_T$	X_n
c)	X	$\equiv_m$	$\{\langle x,y\rangle \mid x \in X_y\}$
2a)	Y_n	$\leq_m$	Y_{n+1}
b)	Y_{n+1}	$\not\leq_T$	Y_n
c)	Y	$\equiv_m$	$\{\langle x,y\rangle \mid x \in Y_y\}$
3a)	Z_n	$\leq_m$	Z_{n+1}
b)	Z_{n+1}	$\not\leq_T$	Z_n
c)	Z	$\equiv_m$	$\{\langle x,y\rangle \mid x \in Z_y\}$
4a)	X_o	$\equiv_m$	Y_o
b)	X_n	$\leq_{bq}$	Y_n
c)	Y_n	$\leq_{btt}$	X_n

d) $X \leq_q Y$

e) $Y \leq_{tt} X$

f) $Y_1 \leq_p X$

5a) $Y_o \equiv_m Z_o$

b) $Y_n \leq_{bp} Z_n$

c) $Z_n \leq_{btt} Y_n$

d) $Y \leq_p Z$

e) $Z \leq_{tt} Y$

f) $Z_1 \not\leq_p Y$

6a) $Y_o \equiv_m I_o$

b) $Y_n \leq_{bc} I_n$

c) $I_n \leq_{bq} Y_n$

d) $Y \leq_c I$

e) $I \leq_q Y$

7a) $I_{n+1} \leq_m J_{n+1}$

b) $J_{n+1} \leq_{bc} I_{n+2}$

c) $I \leq_m J$

d) $J \leq_{bc} I$.

Beweis: Es können die folgenden trivialen Fälle (I_n , I , J_n , J , X_n , X , Y_n , Y , Z_n oder Z leer oder ganz ω) auftreten:

$$I_n = \emptyset \iff cl\emptyset = \emptyset$$

$$I , J = \omega \iff cl\emptyset = M$$

$$X_n , Y_n , Z_n = \emptyset \iff (|A| \leq n \Rightarrow clA = A)$$

$$X , Y , Z = \emptyset \iff cl = Id|PM$$

Für diese Fälle folgen die Behauptungen unmittelbar, und für die übrigen Fälle folgen die behaupteten Reduzierbarkeiten aus der Rekursivität von $\{x \mid |D_x| < n\}$ und den Beziehungen

(a) cl-abhängig $\iff$ (a) total cl-abhängig

$\iff$ (a) Kreis

$\iff$ $a \in cl\emptyset$

D cl-abhängig $\iff$ $\exists E \subseteq D$ E total cl-abhängig

D total cl-abh. $\iff$ $\forall a \in D\ \exists E \subseteq D$ (E cl-unabhängig & $E \cup (a)$ cl-unabhängig)

$\iff$ $\forall a \in D\ \exists E \subseteq D$ $E \cup (a)$ Kreis

$\iff$ $\forall a \in D$ $a \in cl(D - (a))$

D Kreis $\iff$ D total cl-abhängig & $\forall E \subseteq D$ E nicht total cl-abhängig

$a \in clD$ $\iff$ $(a \notin D \Rightarrow \exists E \subseteq D$ $E \cup (a)$ total cl-abhängig)

$\iff$ $\exists b \in D \cup cl\emptyset$ $a \sim_D b$

$\iff$ $\forall b \in D \cup cl\emptyset$ $a \sim_D b$ für $D \cup cl\emptyset \neq \emptyset$

$\iff$ $0 = 1$ für $D \cup cl\emptyset = \emptyset$

$a \sim_D b$ $\iff$ $a \in cl(D \cup (b))$ & $b \in cl(D \cup (a))$.

Als Gegenbeispiel für (1b), (2b) und (3b) wählen wir das Beispiel von Satz (4.12) für den Fall $d_n \leq d_{n+1}$ und für (M, cl_A, ν) . Zum Gegenbeispiel für (4f) wählen wir $S \subseteq \omega$ aus $\Sigma_1 - \Delta_1$ und betrachten das durch $C = \{S, \omega\}$ auf (ω, Id) definierte Matroid. Dann ist wegen

D cl-abhängig $\iff$ $(D \cap S = \emptyset \Rightarrow |D| \geq 2)$

$a \notin S$ $\iff$ $(a \neq a_0 \Rightarrow \{a, a_0\}$ total cl-abhängig $)(a_0 \notin S)$

X r.a. und Y_1 nicht r.a. Das Gegenbeispiel für (5f) erhalten wir aus $S \subseteq \omega$ aus $\Sigma_1 - \Delta_1$, indem wir $C = \{A \mid \forall x(x \in S \Rightarrow 2x \in A)$ & $\forall x(2x \in A \iff 2x+1 \in A)\}$ auf (ω, Id) betrachten. Dann ist wegen

$2a \in clD$ $\iff$ $(2a+1 \notin D \Rightarrow a \in S)$

$2a+1 \in clD$ $\iff$ $(2a \notin D \Rightarrow a \in S)$

$a \notin S$ $\iff$ $\{2a, 2a+1\}$ Kreis

nach (6d) Y r.a. und Z_1 nicht r.a.

Wir bemerken noch, daß wir im Beweis von Satz (4.11) der Tatsache, daß J das Matroid (M,cl) nicht eindeutig bestimmt (vgl. Lemma (3.2)), durch eine - für eine Klasse von Matroiden allerdings nicht rekursive - Fallunterscheidung Rechnung getragen haben.

Satz (4.12) Seien (M,cl) ein reguläres Matroid, (M,cl,ν) rekursiv und $S \subseteq {}^2\omega$ r.a. mit $\{y|(x,y) \in S\} \leq_T \{y|(x+1,y) \in S\}$. Dann gibt es eine r.a.Menge $A \subseteq M$ mit

a) $X_n \equiv_T \{y|(n,y) \in S\}$

b) $X \equiv_T S$.

Beweis: S. [6].

§ 5 Codierte Matroide

5.1 Semikonstruktive Matroide I

Definition (5.1) Sei c eine Codierung der Menge M. Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M heißt effektiv c-dicht, wenn jede Äquivalenzklasse von $\sim$ c-dicht und der Operator $\lambda a/b[a \sim b) : M \to PM$ c-berechenbar ist.

Definition (5.2) Eine Codierung c des Matroids (M,cl) heißt zulässig, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Δ effektiv abgeschlossen

b) Δ^{*} effektiv c-dicht

c) $\sim_{\ell}$ effektiv c-dicht .

Definition (5.3) Ein Matroid (M,cl), versehen mit einer zulässigen Codierung c heißt semikonstruktiv, wenn cl c-berechenbar ist.

Ist (M,cl,c) ein zulässig codiertes Matroid, dann erfüllt T_c nach Lemma (2.20) das T_1-Axiom, und aufgrund von (5.2.c) sind T_c und cl verträglich. Nach Lemma (2.19) ist jedes zulässige Matroid (M,cl,c) unendlich und M besitzt keine r.a. c-Beispielmenge. Analog zeigt man für semikonstruktive Matroide, daß sie unendlichdimensional sind, und daß keine cl-Basis eine r.a. c-Beispielmenge hat.

Als Beispiele für semikonstruktive Matroide werden wir in §7 eine Reihe von V V-topologischen Körpern angeben und weiter untersuchen. Ein Beispiel für ein nicht reguläres semikonstruktives Matroid ist (G,fc,Id). Die Semikonstruktivität von fc folgt aus der Berechenbarkeit von $g \pm F$ für alle $g \in G$.

Lemma (5.4) Sei (M,cl,c) ein zulässiges Matroid. Dann sind Äquivalent:

(i) cl c-berechenbar

(ii) cl' c-berechenbar .

Beweis: Wir können die Beweisidee von Lemma (4.4) übertragen.

(i) => (ii): Die Beziehung $b \in cl'(a,D) \iff a \in cl(D \cup \{b\}) \wedge b \in cl(D \cup \{a\})$ liefert nach Lemma (2.18) effektiv zu jedem (a,D) eine c-Beispielmenge von $cl'(a,D)$ aus Σ_2 ; und da die $\sim_\emptyset$-Äquivalenzklasse von a und damit auch die Menge $cl'(a,D)$ nicht leer und effektiv c-dicht sind, liefert Korollar effektiv eine c-Beispielmenge von $cl'(a,D)$ aus Σ_1. Dann folgt die Behauptung aus dem s-m-n-Theorem.

(ii) (i): Wir müssen wieder die Fälle $cl\emptyset = \emptyset$ und $cl\emptyset \neq \emptyset$ unterscheiden. $cl\emptyset$ ist je nachdem leer oder gleich $cl'(a,\emptyset)$ für ein $a \in cl\emptyset$, und clD mit $b \in D$ ist gleich $cl'(b,D)$.

In den Beweis von Lemma (4.4) ging die Entscheidbarkeit des Wortproblems Δ ein. Nach Lemma (2.19) und Lemma (2.20) ist Δ hier nicht entscheidbar. Dafür konnte im Beweis von Lemma (5.4) die c-Dichtheit der Bildmengen von cl' ausgenutzt werden, weil diese nicht leer sind. Dies war bei der Anwendung von Korollar (2.28) bzw. Satz (2.27) für die Konvergenz der Prioritätskonstruktion notwendig. Für cl^+ formulieren wir daher die Übertragung von Lemma (4.4) nur unter der Einschränkung, daß $\{D \in P_\omega M | cl^+ \neq \emptyset\}$ eine r.a. c-Indexmenge hat. Hinreichend dafür ist z.B. die Regularität von (M,cl) .

Lemma (5.5) Sei (M,cl,c) ein zulässiges Matroid, und $\{D \in P_\omega M | cl^+ D \neq \emptyset\}$ habe eine r.a. c-Indexmenge. Dann sind Äquivalent:

(i) cl c-berechenbar

(ii) cl^+ c-berechenbar .

Ein Beispiel für ein semikonstruktives Matroid (M,cl,c), in dem cl^+ nicht c-berechenbar ist, ist (G,fc,Id). Angenommen fc^+ ist Id-berechenbar, dann ist für ein $a \in G$ die $\sim_\emptyset$-Äquivalenzklasse von a

$$\{b \mid a \sim_\emptyset b\} = \{b \mid \{a,b\} \text{ fc-abhängig }\}$$
$$= \{b \mid fc^+\{a,b\} \neq \emptyset\}$$

effektiv offen und ihr Komplement als abgeschlossene und dichte Teilmenge von G gleich G. Widerspruch.

5.2 Semikonstruktive Matroide II

Um die Frage zu klären, ob und wie auch andere Ergebnisse von §4 auf zulässige Matroide übertragen werden können, muß zunächst eine geeignete Übertragung von rekursiv und r.a. auf codierte Mengen oder wenigstens auf zulässige Matroide gefunden werden. In §2 haben wir zwei Möglichkeiten betrachtet, r.a. auf codierte Mengen (M,c) zu übertragen; nämlich die, daß wir von $A \subseteq M^{m,n}$ verlangen, eine r.a. c-Indexmenge bzw. eine r.a. c-Beispielmenge zu haben. Wir werden zuerst zeigen, daß keiner dieser Begriffe geeignet ist, eine Parallele zu Lemma (4.2) zu finden.

Lemma (5.6) Sei (M,cl,c) ein zulässiges Matroid. Dann ist weder eine c-Indexmenge noch eine c-Beispielmenge von X r.a.

Beweis: 1) Sei $a \in M$. Angenommen X hat eine r.a. c-Idexmenge, dann hat auch $cl\{a\} = \{b \mid \{a,b\} \in X\}$ eine solche. Nun ist $M - cl\{a\}$ nicht leer, dicht und effektiv abgeschlossen, also gleich M. Widerspruch.
2) Wegen der c-Dichtheit von $\sim_\emptyset$ gibt es zu jedem $a \in M$ ein $b \in M$ mit $\{a,b\} \in X$. Es folgt $M = \cup X$. Diese Beziehung liefert zu jeder r.a. c-Beispielmenge von X eine von M im Widerspruch zu Lemma (2.19).

Die Eigenschaft, eine r.a. c-Beispielmenge zu besitzen, ist jedoch hinreichend und notwendig, um Lemma (4.9.3) zu übertragen: Offenbar ist für ein semikonstruktives Matroid (M,cl,c) und $A \subseteq M$ die Kontraktion (M,cl_A,c) genau dann semikonstruktiv, wenn clA eine r.a. Beispielmenge besitzt.

Zwei mit der Matroidstruktur eng verknüpfte Begriffe, die ebenfalls als eine Übertragung von r.a. angesehen werden können, sind die folgenden beiden KLassen.

Definition (5.7) Sei (M,cl,c) ein zulässiges Matroid. $A \subseteq M^{m,n}$ ist aus E (bzw. E'), wenn es ein $h \in H$ gibt, so daß für jedes x mit $W_x \subseteq G$ (bzw. $\gamma W_x \subseteq G$ und $c \cdot \gamma W_x$ cl-unabhängig) $c \cdot \gamma^{m,n}(W_{hx}) = (cl(c \cdot \gamma W_x))^{m,n} \cap A$ gilt.

Mit anderen Worten: A ist genau dann aus E bzw. aus E' wenn es eine rekursive Funktion h gibt, die zu jedem W-Index einer c-Beispielmenge einer Menge $X \subseteq M$ bzw. einer unabhängigen Menge $X \subseteq M$ einen W-Index einer Beispielmenge für $(clX)^{m,n} \cap A$ liefert. Offenbar gilt $E \subseteq E'$. Wir werden weiter unten sehen, daß diese Inklusion echt ist.

Mit den zum Beweis von Lemma (4.11) und Lemma (4.4) benutzten Beziehungen, mit Korollar (2.28) und mit Hilfe der c-Dichtheit der I, J, X, Y, I^c, J^c, X^c, Y^c und Z^c in jeder Mächtigkeit zeigt man für zulässige Matroide

$$I \in E \iff J \in E \iff Y \in E$$

$$I \in E \iff (M,cl,c) \text{ semikonstruktiv}$$

$$I \in E' \iff J \in E' \iff Y \in E'$$

$$Z = E \implies Y \in E \implies X \in E$$

$$Z \in E' \implies Y \in E' \implies X \in E'$$

und für semikonstruktive Matroide

$$I^c \in E \iff J^c \in E \iff X^c \in E \iff Y^c \in E \iff Z^c \in E$$

$$I^c \in E' \iff J^c \in E' \iff X^c \in E' \iff Y^c \in E' \iff Z^c \in E' \quad .$$

Ein Teil dieser Äquivalenzen ist jedoch leer:

Lemma (5.8) Sei (M,cl,c) ein semikonstruktives Matroid. Dann gilt $X^c \in E$ und $X^c \in E'$.

Beweis: 1) Seien $q \in M$ mit $q \notin cl\emptyset$ und dazu A wie in Lemma (6.10). Angenommen X^c ist aus E, dann hat $A - cl\{q\}$ wegen

$p \in A - cl\{q\} \iff \{p,q\} \in X^c \cap P_\omega A$ eine c-Beispielmenge aus Σ_2 im Widerspruch zu Lemma (6.10).

2) $B \subseteq M$ sei cl-unabhängig und habe eine r.a. c-Beispielmenge B'. Dann hat die Menge $X^c \cap P_\omega(clB)$ wegen der Beziehung

$D \in X^c \cap P_\omega(clB) \iff \exists E,E' \in P_\omega B(D \subseteq clE \;\&\; clE = cl(D \cup E') \;\&\; |D| = |E - E'|)$

eine c-Beispielmenge aus Σ_2 effektiv in einem W-index von B'. Es folgt $X^c \in E'$ nach Korollar (2.28).

Das Resultat $X^c \in E'$ für semikonstruktive Matroide kann als eine Übertragung von Lemma (4.6) angesehen werden, wie auch der Beweis zeigt.

Korollar (5.9) Seien (M,cl) semirekursiv und $A \subseteq M$ cl-unabhängig; A habe eine rekursive c-Beispielmenge. Dann hat die Familie der Relationen $a \notin clD$ in A, d.h. die Menge $I^c \cap A \times P_\omega A$ eine rekursive c-Beispielmenge.

§ 6 $L(M,cl,c)$ und $K(M,cl,c)$

6.1 Einführung

In diesem Paragraphen sei (M,cl,c) ein semikonstruktives Matroid. Zur Beschreibung von $G = Vb(c)$ werden wir die Numerierung κ von H benutzen (vgl. Lemma (2.5), κ: $x \to \lambda ykxy$) und $(w_y)_{y<\omega}$ sei eine feste rekursive Aufzählung aller $f \in H$ mit $Vb(f) < \omega$.

Definition (6.1) Eine cl-abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ heißt basisrekursiv, wenn es eine rekursive c-Beispielmenge für eine Basis von A gibt.

Lemma (6.2) Jede basisrekursive Menge besitzt eine rekursive c-Beispielmenge.

Beweis: Sei $A \subseteq M$ basisrekursiv, und $B \in A$ sei eine Basis von A mit einer rekursiven c-Beispielmenge. Dann liefert die Beziehung $A = \bigcup \{cl B' \mid B' \in P_\omega B\}$ eine r.a. und Korollar (2.23) daraus eine rekursive c-Beispielmenge für A..

Die Menge der cl-abgeschlossenen Teilmengen von M , die eine rekursive c-Beispielmenge besitzen, bezeichnen wir mit $L(M,cl,c)$ bzw. kurz mit L , und die Menge der basisrekursiven Teilmengen von M bezeichnen wir mit $K(M,cl,c)$ bzw. kurz mit K . Nach Lemma (6.2) ist $K \subseteq L$. $(L,\subseteq)$ ist mit den Operationen $\lambda A\lambda B\ cl(A \cup B)$ (Vereinigung) und $\lambda A\lambda B\ A \cap B$ (Durchschnitt) ein Verband. $(L,\subseteq)$ hat $cl\emptyset$ als kleinstes Element, und $(L,\subseteq)$ ist atomar. Die Atome sind die Mengen der Form $cl(a)$ für $a \in M - cl\emptyset$. Wie in Lemma (2.19) zeigt man,daß zu jedem $A \in L$ ein über A cl-unabhängiges B mit einer rekursiven c-Beispielmenge existiert. Damit besitzt kein $A \in L$ ein Komplement in L , und in L gibt es kein größtes Element.

6.2 $(K,\subseteq)$ als unterer Halbverband

Lemma (6.3) $U \subseteq M$ sei cl-unabhängig und habe eine c-Beispielmenge aus Π_1, so daß $c \cdot \kappa | B$ injektiv ist. Dann gibt es ein $V \subseteq M$, das zu U punktweise $\sim_\beta$-äquivalent ist, mit einer r.a. c-Beispielmenge.

Beweis: Wir nehmen o.B.d.A. U unendlich an.

1) Beweisidee: Von k, der universellen rekursiven Funktion ausgehend gelangen wir mit einem Prioritätsargument zu $g \in G^2$ mit $c(\{\lambda ygxy | x < \omega\}) = V$ und $x \neq x' \Rightarrow c(\lambda ygxy) \neq c(\lambda ygx'y)$. Im Verlauf der Berechnung von g benutzen wir eine Folge von Markern $(\nabla_x)_{x<\omega}$. Dabei wird der Marker ∇_x schließlich den k-Index einer Funktion $h \in H$ mit $ch \in U$ und $ch \sim_\beta c(\lambda ygxy)$ als Platz einnehmen.

2) Sei B eine c-Beispielmenge für U aus Π_1 mit $c \cdot \kappa | B$ injektiv, und $s \in G$ zähle B^c bijektiv auf. Außerdem sei $\sim_\beta$ effektiv c-dicht via $f \in G^2$, d.h. es gelte $c(\lambda zk(fxy,z)) \sim_\beta c(\lambda zkxz)$ und $w_y \subseteq \lambda zk(fxy,z)$.

3) Wir beschreiben die Berechnung von $\lambda ygxy$. Bei Beginn der Rechnung nimmt der Marker ∇_x den Platz x ein, und $\lambda ygxy$ ist undefiniert. Nach dem t-ten Schritt habe der Marker ∇_x den Platz $[\nabla_x]_t$ inne, und der w-Index des von $\lambda ygxy$ berechneten Anfangsstücks sei $[\lambda ygxy]_t$. Den Platz des Markers ∇_x im t+1-ten Schritt definieren wir durch

$$[\nabla_x]_{t+1} := \begin{cases} [\nabla_x]_t & \text{st } > [\nabla_x]_t \\ [\nabla_{x+1}]_t & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sei t' das letzte $t' \leq t$, so daß im Schritt $t'+1$ der Marker ∇_x verschoben wurde. Wir berechnen $\lambda zk(f([\nabla_x]_t, [\lambda ygxv]_{t'}), z)$ einen Schritt über das Anfangsstück $[\lambda ygxy]_t$ hinaus und erhalten so $[\lambda ygxy]_{t+1}$.

4) Die beschriebene Konstruktion ist effektiv in x. Es folgt $g \in G^2$.

5) Offenbar konvergieren alle Marker und im Limes-Schritt zählen ihre Plätze

B der Größe nach auf. Wegen dieser Konvergenz konvergiert auch für jedes x die Folge der $f([\nabla_x]_t,[\lambda ygxy]_t,)$. Damit ist $c(\lambda ygxy) \sim_\emptyset c(\lambda yk(\lim[\nabla_x]_t,y))$.

Satz (6.4) $A \subseteq M$ habe eine cl-Basis mit einer c-Beispielmenge aus Σ_2 . Dann ist A basisrekursiv.

Beweis: Nach Korollar (2.23) besitzt A eine cl-Basis mit einer c-Beispielmenge B aus Π_1 . Dann ist $B' := \{x \in B \mid \forall x' < x\ x' \in B \Rightarrow c\cdot\kappa x \neq c\cdot\kappa x'\}$ eine Beispielmenge dieser cl-Basis aus Σ_2 mit $c\cdot\kappa|B'$ injektiv. Diese Injektivität bleibt bei erneuter Anwendung von Korollar (2.23) erhalten. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma (6.3) erfüllt. Dieses liefert eine r.a und Korollar (2.23) schließlich eine rekursive c-Beispielmenge einer cl-Basis von A .

Satz (6.5) Seien $A \in K$ und $B \in L$. Dann ist $A \cap B \in K$.

Beweis: Nach Korollar (5.9) hat die Familie $I^c \cap A \times P_\omega A$ der Relationen $a \notin cl(D)$ in A eine rekursive c-Beispielmenge. Sei C eine rekursive c-Beispielmenge von $A \cap B$. Dann ist $U \subseteq \omega$ definiert durch

$$x \in U \iff x \in C \ \&\ c\cdot\kappa x \notin cl(c\cdot\kappa\{x' \in C \mid x' < x\})$$

eine c-Beispielmenge aus Σ_2 für eine Basis von $A \cap B$. Aus Satz (6.4) folgt dann die Behauptung.

Korollar (6.6) Seien $A, B \in L$.

1) $A \in K \ \&\ B \subseteq A \Rightarrow B \in K$.

2) $A \in K \ \&\ A \subseteq B \Rightarrow B \in K$.

Korollar (6.7) $(K,\subseteq)$ ist ein unterer Halbverband.

6.3 $(K,\subseteq)$ ist kein oberer Halbverband

Lemma (6.8) Sei $S \subseteq \omega$ aus Π_2 . Dann gibt es ein $h \in G^2$ mit

a) $x \in S \iff Nb(\lambda thxt) = \omega$

b) $x \notin S \iff \lambda thxt \in F$.

Beweis: Wir geben nur die Definition von h an.

Seien $S' \in \Delta_1$ mit $x \in S \iff \forall y\, \exists z\, (x,y,z) \in S'$ und $s \in G$ eine bijektive Funktion mit $Nb(s) = \{\langle x,y\rangle \mid \forall y' \leq y\, \exists z\, (x,y,z) \in S'\}$. Wir definieren:

$$hxt := \begin{cases} \langle st\rangle_2 & \langle st\rangle_1 = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Lemma (6.9) Seien $Q_0 \in L$, $Q_1 \subseteq M$ effektiv c-dicht und $S \subseteq \omega$ aus Π_2 . Dann gibt es ein $g \in G^2$ mit

a) $\{c(\lambda ygxy) \mid x \in S\}$ cl_{Q_0}-unabhängig

b) $\{c(\lambda ygxy) \mid x \notin S\} \subseteq Q_1$.

Beweis: 1) Beweisidee: g definieren wir induktiv über x . Zur Definition von $\lambda ygxy$ benutzen wir das Diagonalverfahren von Lemma (2.19) und "steuern" es durch die Funktion h , die wir uns zu S nach Lemma (6.8) verschaffen.

2) Sei Q_1 effektiv c-dicht via f . Dem Diagonalverfahren für $\lambda ygxy$ legen wir jeweils eine rekursive Aufzählung $(q_n)_{n<\omega}$ von $cl(Q_0 \cup \{c(xgx'y) \mid x' < x\})$ zugrunde. Nach dem t-ten Schritt habe das bis dahin konstruierte Anfangsstück von $\lambda ygxy$ den w-Index $[\lambda ygxy]_t$. Im Schritt t+1 unterscheiden wir 2 Fälle:

Fall 1 ($hxt \neq 0$): Sei $t' := \mu\{t_0 < t \mid hxt_0 \neq 0\}$. Wir definieren $\lambda ygxy$ für so viele Argumente so, daß $c(\lambda ygxy) \neq q_{t'}$ sichergestellt ist. Wie in Lemma (2.19) ist dies effektiv möglich.

Fall 2 ($hxt = 0$): Sei $t' := \mu t_0\, \forall t_1 (t_0 \leq t_1 \leq t \Rightarrow hxt_1 = 0)$. Wir setzen

$\lambda ygxy$ für das nächste Argument gleich dem Wert von $\lambda yk(f[\lambda ygxy]_{t'},y)$ für das nächste Argument.

3) Die beschriebene Konstruktion ist effektiv in jedem x und effektiv in der Induktion über x. Es folgt $g \in G^2$.

4) Für $x \in S$ ist $\lambda thxt$ für unendlich viele t von Null verschieden, und in der Definition von $\lambda ygxy$ tritt unendlich oft der Fall 1 ein. Damit ist $c(\lambda ygxy)$ von jedem q_n verschieden, also $c(\lambda ygxy)|x \in S)$ cl_{Q_0}-unabhängig.

5) Für $x \notin S$ ist $\lambda thxt \in F$ und in der Definition von $\lambda ygxy$ tritt nach endlich vielen Schritten nur noch der Fall 2 ein. Für das letzte der dabei benutzten t' gilt $\lambda ygxy = \lambda yk(f[\lambda ygxy)]_{t'},y)$ Es folgt $c(\lambda ygxy) \in Q_1$.

Lemma (6.10) Sei $q \in M$. Dann gibt es ein $A \in L$ mit $q \in A$, so daß $A - cl\{q\}$ keine c-Beispielmenge aus Σ_2 hat.

Beweis: Sei $S \subseteq \omega$ aus $\Pi_2 - \Delta_2$, dann liefert Lemma (6.9) für S und $Q_0 = Q_1 = cl\{q\}$ ein $g \in G^2$, mit dem wir $A = cl\{c(\lambda ygxy)|x < \omega\}$ definieren. Angenommen $A - cl\{q\}$ hat $B \in \Sigma_2$ als c-Beispielmenge, dann hat S die Darstellung $x \in S \Leftrightarrow \exists z \in B \; c(\lambda ygxy) = c(\lambda kzy)$ im Widerspruch zu $S \in \Pi_2 - \Delta_2$.

Satz (6.11) $K \subset L$.

Beweis: Sei $q \in M - cl\emptyset$, und sei dazu A wie in Lemma (6.10). Wir zeigen $A \in L - K$. Angenommen B ist eine cl-Basis von A mit einer rekursiven c-Beispielmenge (wir nehmen o.B.d.A. $q \in B$ an), dann hat $A - cl\{q\}$ aufgrund der Darstellung $A - cl\{q\} = \bigcup \{cl'(a,D)|a \in D \in P_\omega B \;\&\; a \in B - D\}$ eine c-Beispielmenge aus Σ_2 im Widerspruch zu Lemma (6.10).

Satz (6.12) In (M,cl) sei zu $a, b \in M$ cl-unabhängig die Menge

$cl\{a,b\} - (cl\{a\} \cup cl\{b\})$ nicht leer. Dann gibt es zu jedem unendlichdimensionalen $A \in K$ ein $B \in K$, so daß $cl(A \cup B)$ nicht aus K ist.

Beweis: Da für $a, b \in M$ cl unabhängig $cl\{a,b\} - (cl\{a\} \cup cl\{b\})$ nicht leer ist, ist der Operator cl^+ eingeschränkt auf alle höchstens zweielementigen Teilmengen von M c-berechenbar. Seien $S \subseteq \omega$ aus $\Pi_2 - \Delta_2$ und die Folge $(a_n)_{n<\omega}$ eine r.a. cl-Basis von A. Dann liefert Lemma (6.9) für S, $Q_0 = A$ und $Q_1 = cl\{a_0\}$ die r.a. Folge $(d_n)_{n<\omega} = (c(\lambda ygny))_{n<\omega}$. Wir nennen das jeweils erste Element von $cl^+\{a_{n+1}, d_n\}$ in einer festen rekursiven Aufzählung b_n und setzen $B := cl\{b_n \mid n < \omega\}$. Offenbar ist die Folge $(b_n)_{n<\omega}$ cl-unabhängig und besitzt eine rekursive c-Beispielmenge, also ist $B \in K$. Angenommen $cl(A \cup B)$ ist aus K, dann ist $cl\{d_n \mid n < \omega\} \subseteq cl(A \cup B)$ nach Lemma (6.5) aus K. Widerspruch.

Korollar (6.13) Sei (M,cl) regulär. Dann ist $(K,\subseteq)$ kein Verband.

Die Ergebnisse von Lemma (2.19) und Lemma (2.20) haben wir als die effektive Version von klassischen Sätzen gedeutet. Als klassisches Analogon von L können wir die Familie der höchstens abzählbaren cl-abgeschlossenen Teilmengen eines Matroids (M,cl) mit der Mächtigkeit $^{\omega}\omega$ und gewissen topologischen Eigenschaften uns als das von K die Familie der Teilmengen von M mit höchstens abzählbarer cl-Basis ansehen. Für die so definierten Begriffe gelten die Sätze (6.11) und (6.12) nicht, denn eine unendliche cl-abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ besitzt stets eine cl-Basis B, die dann wegen der Kompaktheit von cl dieselbe Mächtigkeit wie A hat, und zu jeder Menge $A \subseteq M$ hat der cl-Abschluß aus denselben Gründen die Mächtigkeit von A. Hier liefert die effektive Version also etwas Anderes, Neues.

6.4 Rekursivität auf $K(A)$

In diesem Abschnitt werden wir für Mengen $A \in K$ die Menge $K(A) := PA \cap K$ untersuchen und den Verband $(K(A),\subseteq)$ (vgl. Satz (6.5)) mit dem Verband $(W,\subseteq)$ der r.a. Mengen vergleichen. Dabei wird sich zeigen, daß die in [6] für $L(U)$ bewiesenen Ergebnisse durch Relativierung (auf ein Δ_2-Orakel) unmittelbar auf $K(A)$ übertragen werden können.

Lemma (6.14) Seien $B \subseteq A$ Teilmengen von M, A' und A'' rekursive c-Beispielmengen von A, und seien B' und B'' die Mengen $(c\cdot\gamma)^{-1}B \cap A'$ bzw. $(c\cdot\gamma)^{-1}B \cap A''$. Dann gilt:

1) $B' \in \Sigma_2 \iff B'' \in \Sigma_2$

2) $B' \in \Delta_2 \iff B'' \in \Delta_2$

3) $dg_T B' \cup 0' = dg_T B'' \cup 0'$.

Beweis: $x \in B'' \iff x \in A'' \;\&\; \exists y \in B'\ (c\cdot\gamma x = c\cdot\gamma y)$

$\iff x \in A'' \;\&\; \mu y \in A'\ (c\cdot\gamma x = c\cdot\gamma y) \in B'$.

Definition (6.15) Seien $A \in K$ und $B \subseteq A$ cl-abgeschlossen, und seien A' eine rekursive c-Beispielmenge von A und B' die Menge $(c\cdot\gamma)^{-1}B \cap A'$.

1) B heißt in A aus Σ_2, wenn B' aus Σ_2 ist.

2) B heißt in A aus Δ_2, wenn B' aus Δ_2 ist.

3) B heißt in A vom Grad a, wenn $dg_T B' \cup 0' = a$ ist.

4) B heißt in A entscheidbar, wenn die Familien $X(cl_B) \cap P_\omega A$ der endlichen cl_B-abhängigen und $X(cl_B)^c \cap P_\omega A$ der endlichen cl_B-unabhängigen Teilmengen von A rekursive c-Beispielmengen haben.

Nach Lemma (6.14) sind (1), (2) und (3) von A' unabhängig. Während (1), (2)

und (3) rein rekursionstheoretische Eigenschaften von B beschreiben, beschreibt (4) eine rekursionstheoretische Eigenschaft von B, die die Matroidstruktur von (M,cl) berücksichtigt.

Lemma (6.16) Seien $A \in K$ und $B \subseteq A$ cl-abgeschlossen.

1) B ist genau dann aus $K(A)$, wenn B in A aus Σ_2 ist.

2) B ist genau dann in A entscheidbar, wenn B aus $K(A)$ ist und in $K(A)$ ein unabhängiges Komplement besitzt.

3) Sei B in A entscheidbar. Dann ist B in A aus Δ_2.

Beweis: 1) Satz (6.5), Lemma (2.18), Lemma (6.2).

2) Seien A' eine rekursive c-Beispielmenge von A und B in A entscheidbar. Dann ist V' definiert durch (dabei sei $X_B := X(cl_B) \cap P_\omega A$)
$x \in V' \iff x \in A' \;\&\; \forall E \subseteq c\cdot\gamma\, x'\, (E \in A' \mid x' < x)(E \notin X_B \Rightarrow E \cup c\cdot\gamma x) \in X_B^c)$ eine c-Beispielmenge für eine cl_B-Basis von A aus Σ_2 (s. Lemma (2.18)), und $cl(c\cdot\gamma V')$ nach Satz (6.4) ein unabhängiges Komplement von B in $K(A)$.
Seien U eine cl-Basis von B mit einer rekursiven c-Beispielmenge und V eine cl_B-Basis von A mit einer rekursiven c-Beispielmenge. Dann liefern die Beziehungen $D \in X_B \iff \exists E \in P_\omega B\; D \cup E \in X$ und
$D \in X_B^c \iff \exists E \subseteq V\; \exists E' \subseteq (U \cup V) - E\; (|D| = |E| \;\&\; E \subseteq cl(D \cup E') \;\&\; D \subseteq cl(E \cup E'))$ c-Beispielmengen für X_B und X_B^c aus Σ_2 (Lemma (2.19.2)). Es folgt die Behauptung (vgl. Abschnitt (5.2)).

3) $a \in B \iff \{a\} \in X_B$, $a \notin B \iff \{a\} \in X_B^c$.

Korollar (6.17) Sei $A \in K$ endlichdimensional. Dann ist jedes $B \in K(A)$ in A entscheidbar.

Durch Lemma (6.16) sind die Eigenschaften, aus $K(A)$ bzw. in A entscheidbar

zu sein, auf die rekursionstheoretischen Eigenschaften, in A aus Σ_2 bzw. in A aus Δ_2 zu sein, zurückgeführt; und für den Vergleich zwischen $\mathcal{K}(A)$ und $\mathcal{W}$ erscheint die Entscheidbarkeit eines B in A als die natürliche Prallele zur Rekursivität eines $S \in \mathcal{W}$, zumindst unter verbandstheoretischen Gesichtspunkten. Daß dieser Begriff die Eigenschaft, in A aus Δ_2 zu sein, nur impliziert, nicht aber zu ihr äquivalent ist, werden wir in Korollar (6.25) sehen.

Die folgenden beiden Sätze gestatten nun die angekündigte Übertragung von Ergebnissen wie der in [6] über $\mathcal{L}(U)$ durch Relativierung auf $\mathcal{K}(A)$.

Satz (6.18) Sei $A \in \mathcal{K}$. Dann besitzt A eine Numerierung α mit

a) $\alpha \leq c$

b) $\alpha^{-1}\Delta$ rekursiv

c) $\alpha^{-1}X$ aus Δ_2

d) (A,cl,α) besitzt eine rekursive Basis.

Beweis: Sei U' eine rekursive c-Beispielmenge einer cl-Basis von A nach Lemma (2.3.2) o.B.d.A. mit $c\cdot\gamma|U'$ injektiv, und sei $h \in G$ mit $c\cdot\gamma(W_{hx}) = cl(c\cdot\gamma D_x)$ und o.B.d.A. (Lemma (2.6)) mit $x \in D_z \;\&\; y \in W_{hz} \Rightarrow x < y$. Dann ist $A'' := U' \cup \{W_{hx} | D_x \subseteq U'\}$ eine r.a. c-Beispielmenge von A, zu der nach Lemma (2.3.2) eine r.a. c-Beispielmenge $A' \subseteq A''$ mit $c\cdot\gamma|A'$ bijektiv und $U' \subseteq A'$ existiert. Ein injektives $s \in G$ mit $Nb(s) = A'$ liefert schließlich $\alpha := c\cdot\gamma\cdot s$, das die Behauptung erfüllt. Zu (c) vgl. Lemma (2.18) und Lemma (5.8).

Satz (6.19) Sei (A,cl,α) ein numeriertes Matroid mit $\alpha^{-1}\Delta$ rekursiv, $\alpha^{-1}X$ aus Δ_2, einer rekursiven Basis U und so, daß eine rekursive Äquivalenzrelation $\sim$ mit $\sim_\phi \subseteq \sim$ existiert, in der jede Äquivalenzklasse unendlich ist.

Dann läßt sich (A,cl,α) zu einem semikonstruktiven Matroid (M,op,c) mit $A \in K$ und $\alpha \leq c$ erweitern.

Beweis: Sei $S \subseteq \omega$ eine rekursive Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ genau ein Element enthält. Dann gibt es zur Abbildung $f : S \to G$ mit $fx = \lambda y(\alpha^{-1}x)$ eine Abbildung $f^* : A \to G$, die f erweitert, jede $\sim$-Äquivalenzklasse von A bijektiv auf eine $\sim_G$-Äquivalenzklassee von (G,fc) abbildet und (α,Id)-brechenbar ist (bezüglich (G,Id)). Wir definieren $(M,cl) := (G,Id)$ und $op := fc \cdot f^* \cdot cl \cdot f^{*-1}$. Die Semikonstruktivität von (M,op,c) folgt aus der Definition (vgl. Lemma (2.18)), ebenso $\alpha \leq c$; und es ist $f^*A \in K$ via f^*U.

Mit Hilfe der Sätze (6.18) und (6.19) lassen sich Aussagen über rekursive Matroide (M,cl,ν), deren Beweis relativiert werden kann und die bei der Beschreibung von Teilmengen $N \subseteq M$ nur die rekursionstheoretischen Mittel $\nu^{-1}N \in \Delta_1$ und $\nu^{-1}N \in \Sigma_1$ benutzen, auf $K(A)$ übertragen, indem Δ_1 durch Δ_2 und Σ_1 durch Σ_2 ersetzt wird. Dabei liefert Satz (6.18) die Übertragung für All-Aussagen und Satz (6.18) die Übertragung für Existenz-Aussagen. Auf diese Weise liefert [6] die folgenden Ergebnisse.

Satz (6.20) Seien $A \in K$ und $B \in K(A)$ unendlichdimensional. Dann besitzt B eine unendlichdimensionale in A entscheidbare Teilmenge aus $K(A)$.

Definition (6.21) Seien $A \in K$ und $B \in K(A)$ unendlichdimensional, und sei A unendlichdimensional über B.

1) B heißt in A maximal, wenn für jedes $C \in K(A)$ mit $B \subseteq C$ entweder C über B oder A über C endlichdimensional ist.
2) B heißt in A supermaximal, wenn für jedes $C \in K(A)$ mit $B \subseteq C$ entweder C über B endlichdimensional oder $C = A$ ist.

Satz (6.22) Seien $A \in K$ und $U \subseteq A$ eine cl-Basis von A, die eine rekursive c-Beispielmenge U' besitzt. Ist $B' \subset U'$ Σ_2-maximal (bezogen auf U'), dann ist $cl(c\cdot\gamma B')$ in A maximal.

Korollar (6.23) Sei $A \in K$ unendlichdimensional. Dann gibt es ein $B \in K(A)$, das in A maximal aber nicht supermaximal ist.

Satz (6.24) Sei $A \in K$ regulär und unendlichdimensoinal. Dann enthält $K(A)$ supermaximale Elemente, die in A aus Δ_2 sind.

Korollar (6.25) Sei $A \in K$ regulär und unendlichdimensional. Dann gibt es ein $B \in K(A)$, das in A aus Δ_2 aber nicht entscheidbar ist.

Satz (6.26) Sei $A \in K$ unendlichdimensional. Dann gibt es ein in A maximales $B \in K(A)$, so daß keine Basis U von B mit einer rekursiven c-Beispielmenge zu einer unabhängigen Menge V mit einer rekursiven c-Beispielmenge unendlichdimensional über B erweitert werden kann.

6.5 $K(A)$ für einfache A

Abschließend beweisen wir noch zwei Sätze über $K(A)$, die die in Abschnitt 6.4 entwickelte Theorie ergänzen und keine Parallele in der Rekursionstheorie für rekursive Matroide, d.h. in dem in [6] betrachteten Verband $\mathcal{L}(U)$ haben.

Definition (6.27) 1) Eine Numerierung α von $A \in K$ heißt einfach, wenn (A,cl,α) rekursiv und $\alpha \leq c$ ist.

2) $A \in K$ heißt einfach, wenn zu jeder rekursiven c-Beispielmenge U' einer cl-Basis von A mit $c\cdot\gamma|U'$ injektiv eine einfache Numerierung α von A mit $\alpha^{-1}\cdot c\cdot\gamma|U' \in$ existiert.

Für die in den §§ 7 und 8 behandelten Beispiele sind alle $A \in K$ einfach und besitzen daher auch einfache Numerierungen. Ein Beispiel für ein semikonstruktives Matroid (M,cl,c) und ein $A \in K$, das keine einfache Numerierung besitzt, läßt sich mit der Idee des Beispiels von Lemma (4.3.2) für $S \in \Delta_2 - \Sigma_1$ und mit Hilfe von Satz (6.16) konstruieren.

Satz (6.28) Seien $A \in K$ und α eine einfache Numerierung von A. Dann ist jedes cl-abgeschlossene $B \subseteq A$ mit $\alpha^{-1}B \in \Sigma_1$ in A entscheidbar.

Beweis: Lemma (4.9.3), Lemma (4.5), Satz (6.5), Lemma (6.16).

Satz (6.29) Seien $A \in K$ einfach und $B \in K(A)$ in A entscheidbar, und seien (B,cl) und (A,cl_B) unendlichdimensional. Dann gibt es zu jedem c-Grad a aus Δ_2 eine einfache Numerierung α von A mit $\alpha^{-1}B \in a$.

Beweis: 1) Nach Lemma (6.16.2) gibt es r.a. c-Beispielmengen B' und U'

für eine cl-Basis von B bzw. eine cl_B-Basis von A. Außerdem gibt es ein $S \subseteq \omega$ aus α mit $|S| = |S^c| = \omega$ und eine bijektive Funktion $h : \omega \to B' \cup U'$ mit $hB' = S$ und $Graph(h) \in \Gamma_2$. Sei nun $hn = x \iff \exists y \forall z\ (n,x,y,z) \in Q_0$ mit $Q_0 \in \Delta_1$. Schließlich sei $\sim_\phi$ effektiv c-dicht via f, d.h. es gelte $c(\lambda zk(fxy,z)) \sim_\phi c(\lambda zkxz)$ und $w_v \subseteq \lambda zk(fxy,z)$.

2) Wir konstruieren eine Funktion $g \in G^2$ mit $c(\lambda mgnm) \sim_\phi c(\lambda mk(hn,m))$. Zur Berechnung von $\lambda mgnm$ benutzen wir einen Marker ∇_n, dessen Platz $[\nabla_n]_t$ zu Beginn des t-ten Schritts jeweils ein Paar aus $(B' \cup U') \times \omega$ ist. $[\nabla_n]_o$ ist das kleinste Paar aus $(B' \cup U') \times \omega$.

Sei $[\nabla_n]_t = (x,y)$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall 1 ($\forall z < t\ (n,x,y,z) \in Q_0$): Wir setzen $\lambda mgnm$ für das nächste m gleich $k(f(x,[\lambda mgnm]_t),m)$.

Fall 2 ($\exists z < t\ (n,x,y,z) \notin Q_0$): Wir verschieben ∇_n zum nächsten Paar aus $(B' \cup U') \times \omega$.

3) $g \in G^2$.

4) Zu n gibt es genau ein $x \in B' \cup U'$ mit $hn = x$, und es gibt ein y mit $\forall z\ (n,x,y,z) \in Q_0$. Sei (x,y) das kleinste Paar mit $\forall z\ (n,x,y,z) \in Q_0$, dann gibt es nach Konstruktion ein t mit $\forall t' > t\ [\nabla_n]_{t'} = (x,y)$ und $gnm = k(f(x,[\lambda mgnm]_t),m)$. Es folgt $c(\lambda mgnm) \sim_\phi c(\lambda mkxm)$ und damit das von g verlangte, nämlich $c(\lambda mgnm) \sim_\phi c(\lambda mk(hn,m))$.

5) Mit diesem g folgt die Behauptung des Satzes aus der Einfachheit von A und der Kompaktheit von cl.

Korollar (6.30) Seien $A \in K$ einfach und $B \in K(A)$ in A entscheidbar, und seien (B,cl) und (A,cl_B) unendlichdimensional. Dann gibt es zu jedem c-Grad α aus Δ_2 eine rekursive c-Beispielmenge A' von A mit $A' \cap (c \circ \gamma)^{-1} B \in \alpha$.

Korollar (6.31) Sei $A \in K$ regulär und unendlichdimensional. Dann gibt es ein

$B \subseteq A$, so daß für jede rekursive c-Beispielmenge A' von A das Urbild $A' \cap (c \cdot \gamma)^{-1} B$ aus $\Delta_2 - \Sigma_1$ ist.

Beweis: Satz (6.24), Satz (6.28), Satz (6.29).

Aus Korollar (6.30) folgt, daß für einfache $A \in K$ von unendlicher Dimension und in A entscheidbare $B \in K(A)$ Lemma (6.14.2) eine optimale Schranke liefert; und Korollar (6.31) zeigt, daß diese Schranke nicht von allen $B \in K(A)$ ausgeschöpft wird.

§ 7 V-topologische Körper

7.1 V-topologische Körper als semikonstruktive Matroide

Eine Struktur A besteht aus einer Trägermenge $|A|$, einer indizierten Menge $(f_i)_{i \in I}$ von n_i-stelligen totalen Funktionen über $|A|$ und einer indizierten Menge $(R_j)_{j \in J}$ von m_j-stelligen Relationen über $|A|$. Wir nehmen $I \cap J = \emptyset$ an. Gruppen betrachten wir als Strukturen vom Typ $(e,\cdot,^{-1})$ und Körper als Strukturen vom Typ $(0,1,+,-,\cdot)$. $^{-1}$ sehen wir als eine definierbare partielle Funktion an. Eine Struktur mit $J = \emptyset$ nennen wir eine Algebra.

Eine topologische Algebra (A,T) ist eine Algebra A versehen mit einer Topologie T, bezüglich der alle Operationen von A stetig sind, und eine uniforme Algebra (A,N) ist eine Algebra versehen mit einer Uniformität N, bezüglich der alle Operationen von A gleichmäßig stetig sind. Dieser letzte Begriff ist so stark, daß er von vielen interessanten Strukturen, die wir behandeln werden, nicht mehr erfüllt wird. Wir werden daher noch die Begriffe lokal beschränkt und V-topologisch definieren. Für Gruppen gilt dagegen das folgende Lemma.

Lemma (7.1) Sei (A,T) eine topologische Gruppe, und seien U die Umgebungen von e und N der von $\{\{(x,y) | \frac{x}{y} \in U\} | U \in U\}$ erzeugte Filter auf $^2|A|$.

1) T ist durch U eindeutig bestimmt: $T = \{x \cdot U | x \in |A| \ \& \ U \in U\}$.

2) N ist eine Uniformität auf $|A|$, die T erzeugt; und (A,N) ist eine uniforme Gruppe.

Zu einer topologischen Gruppe (A,T) nennen wir das in Lemma (7.1) mit N bezeichnete Mengensystem die natürliche Uniformität von (A,T).

Ein topologischer Körper (A,T) heißt lokal beschränkt, wenn T das T_2-Axiom und das Axiom (U seien die Umgebungen von 0)

$$\exists V \in U\ \forall U \in U\ \exists W \in U\ \forall x,y \in |A|\ (x \in V \ \&\ y \in W \Rightarrow x \cdot y \in U)$$

erfüllt; und ein V-topologischer Körper (A,T) ist ein topologischer Körper, dessen Topologie das T_2-Axiom und das Axiom (U seien die Umgebungen von 0)

$$\forall U \subset U\ \exists W \in U\ \forall x,y \in |A|\ (x,y \notin U \Rightarrow x \cdot y \notin W)$$

erfüllt. Jeder V-topologische Körper ist lokal beschränkt, und in einem V-topologischen Körper ist $^{-1}$ stetig. Die Vervollständigung eines topologischen Körpers ist auf natürliche Weise ein Ring und die eines V-topologischen Körpers wegen des V-topologischen Axioms ein V-topologischer Körper und wegen des T_2-Axioms eindeutig bestimmt.

Lemma (7.2) Ein V-topologischer Körper ist entweder ein Unterkörper des Körpers der komplexen Zahlen C versehen mit der Spurtopologie oder ein bewerteter Körper versehen mit der natürlichen Topologie für Bewertungen. Jeder solche Körper ist V-topologisch.

Definition (7.3) Sei A eine Struktur mit $I \cup J \subseteq \omega$ und I , J , $\{(i,n_i) | i \in I\}$ und $\{(j,m_j) | j \in J\}$ rekursiv, und sei α eine Numerierung von $|A|$ mit rekursivem Wortproblem. Dann heißt (A,α) eine rekursive Struktur, wenn die Mengen $\{(i,x_0,\ldots,x_{n_i}) | i \in I \ \&\ \alpha x_0 = f_i \alpha x_1 \ldots \alpha x_{n_i}\}$ und $\{(j,y_0,\ldots,y_{m_j}) | j \in J \ \&\ R_j \alpha y_0 \ldots \alpha y_{m_j}\}$ rekursive Mengen sind.

Ist (A,α) eine rekursive Struktur, dann nennen wir α eine rekursive Numerierung von A , und eine Struktur A nennen wir rekursiv, wenn es eine rekursive Numerierung von A gibt. der Begriff der rekursiven Struktur bedarf damit der Angabe von (A,α) bzw. A . Nach der Bemerkung im Anschluß an Definition (4.1) ist jeder rekursive Körper (A,α) versehen mit dem relativ algebraischen Ab-

schluß ein semirekursives und im Allgemeinen kein rekursives Matroid.

Auf die Einführung eines Rekursivitätsbegriffes für codierte Strukturen werden wir verzichten. Wir werden jedoch z.B. mit den Sätzen (7.9) bzw. (7.11) und (7.28) auf mögliche Rekursivitätsbegriffe für bewertete und geordnete Körper hinweisen. Dabei zeigt es sich, daß es nicht sinnvoll ist, von den Relationen zu verlangen, daß sie effektiv offen-abgeschlossen sind. Für die Relation Δ erinnern wir in diesem Zusammenhang an die Ergebnisse von Abschnitt 2.5: Δ effektiv offen bedeutet, daß es eine auf c reduzierbare Numerierung α gibt, daß also c durch α vollständig beschrieben werden kann, und Δ effektiv abgeschlossen impliziert für T_c eine Bedingung, die zwischen dem T_1-Axiom und dem T_2-Axiom liegt. Da für die Topologie einer topologischen Gruppe das T_1-Axiom und das T_2-Axiom äquivalent sind, kann in diesem Fall Δ effektiv abgeschlossen als eine effektive Form des T_2-Axioms angesehen werden.

Die Rekursivität einer numerierten topologischen Algebra (A,T,α) versehen mit der Basis N einer Uniformität, die T erzeugt, definieren wir in naheliegender Weise, nämlich indem wir neben der Rekursivität von (A,α) und $(|A|,N,\alpha)$ noch die Effektivität der jeweiligen Verträglichkeitsbedingungen fordern. Dabei benötigen wir später die folgenden Fälle.

Definition (7.4) Seien A eine Algebra, N die Basis einer Uniformität auf $|A|$ und α eine Numerierung von $|A|$. ($N = (N_m)_{m \in \omega}$)

1) (A,N,α) ist eine rekursive uniforme Algebra, wenn (A,α) eine rekursive Struktur, N eine rekursive Uniformitätsbasis auf $(|A|,\alpha)$ und alle f_i effektiv in i effektiv gleichmäßig stetig sind.

2) (A,N,α) ist ein rekursiver lokal beschränkter Körper, wenn (A,α) ein rekursiver Körper, N eine rekursive Uniformitätsbasis auf $(|A|,\alpha)$, $+$ und

- effektiv gleichmäßig stetig sind und wenn es ein $h \in G$ gibt mit

$$x \in N_o(0) \;\&\; y \in N_{hm}(0) \Rightarrow x \cdot y \in N_m(0) \quad .$$

3) (A,N,α) ist ein rekursiver V-topologischer Körper, wenn (A,α) ein rekursiver Körper, N eine rekursive Uniformitätsbasis auf $(|A|,\alpha)$, $+$ und $-$ effektiv gleichmäßig stetig sind und wenn es ein $h \in G$ gibt mit

$$x \,,\, y \notin N_m(0) \Rightarrow x \cdot y \notin N_{hm}(0) \quad .$$

Zu diesen Definitionen bemerken wir ohne Beweis, daß jeder rekursive V-topologische Körper (A,N,α) bis auf $\equiv^{eff}$-Äquivalenz von N rekursiv lokal beschränkt ist, und daß je zwei rekursive lokal beschränkte Körper mit gleicher Topologie $\equiv^{eff}$-äquivalente Uniformitätsbasen haben. Damit besitzt ein V-topologischer Körper (A,T) mit einer rekursiven Numerierung von A bis auf $\equiv^{eff}$-Äquivalenz höchstens eine Uniformitätsbasis N, die T erzeugt und so, daß (A,N,α) ein rekursiver V-topologischer Körper ist.

Entsprechende Resultate lassen sich auch für codierte lokal beschränkte Körper beweisen. Dann wird neben der effektiven lokalen Beschränktheit die c-Berechenbarkeit von $+$, $-$, $\cdot$ und die schwache Rekursivität von $(|A|,N,c)$ benötigt.

Satz (7.5) Sei (A,N,α) ein rekursiver V-topologischer Körper. Dann ist die rekursive Vervollständigung von $(|A|,N,\alpha)$ auf natürliche Weise ein Körper $(\hat{A},\hat{N},c)$, für den die folgenden Aussagen gelten:

a) $\alpha \leq c$

b) Δ effektiv abgeschlossen

c) Δ^c effektiv c-dicht

d) $|A|$ effektiv c-dicht

e) $(|\hat{A}|,\hat{N},c)$ streng rekursiv

f) $+$, $-$, $\cdot$, $^{-1}$ c-berechenbar

[illegible]

Beweis: Satz (2.38) und Satz (2.40). Die c-Berechenbarkeit von $\cdot$ und $^{-1}$ folgt aus der Effektivität des V-topologischen Axioms, (g) folgt induktiv (vgl. Satz (2.40.f) und (h) daraus, daß jede Klasse von $\sim_A$ ein $|A|+a$ als Teilmenge enthält.

Korollar (7.6) Sei (A,N,α) ein rekursiver V-topologischer Körper. Dann ist $(|\hat{A}|,ac_{\hat{A}},c)$ ein semikonstruktives Matroid und regulär.

Damit ist es möglich, die Resultate von §6 für $(|\hat{A}|,ac_{\hat{A}},c)$ zu formulieren. Interessant werden diese Resultate jedoch erst dann, wenn K und L eine natürliche Bedeutung haben. Wir werden sehen, daß K und L natürliche Rekursivitätsbegriffe für Körper sind, die wir in einer erweiterten Sprache betrachten. Dazu werden wir in den Abschnitten 7.2 bis 7.5 bewertete Körper ausführlich untersuchen, in den Abschnitten 7.6 und 7.7 Besonderheiten der geordneten Körper behandeln und abschließend in Abschnitt 7.8 auf die rekursiven reellen, komplexen und p-adischen Zahlen kurz eingehen.

7.2 Bewertete Körper als semikonstruktive Matroide

Ein bewerteter Körper ist eine Struktur vom Typ $(0,1,+,-,\cdot,V)$ - dabei sei V ein einstelliges Prädikat -, die neben den Körperaxiomen noch die Axiome

$$x \in V \;\&\; y \in V \;\Rightarrow\; x-y \in V$$

$$x \in V \;\&\; y \in V \;\Rightarrow\; x\cdot y \in V$$

$$x \notin V \;\&\; y \notin V \;\Rightarrow\; x\cdot y \neq 1$$

erfüllt. Wir nehmen außerdem $V \subset |A|$ an. Ist (A,V) ein bewerteter Körper, dann nennen wir V einen Bewertungsring auf A. In einem bewerteten Körper (A,V) sind die Mengen der Form $x\cdot V$ für $x \in |A|$ unter $\subseteq$ total geordnet und bilden die Basis der Umgebungen von 0 einer V-Topologie, der natürlichen Topologie $\mathcal{T}_V$ von (A,V). Die Vervollständigung $(\tilde{A},\tilde{V})$ des bewerteten Körpers (A,V) ist auf natürliche Weise ein bewerteter Körper, der (A,V) als Unterstruktur enthält.

Satz (7.7) Sei (A,V,α) ein rekursiver bewerteter Körper. Dann ist $(A,\mathcal{T}_V,\alpha)$ ein rekursiver V-topologischer Körper.

Beweis: Wegen $x\cdot V \subseteq y\cdot V \Leftrightarrow y\cdot x^{-1} \in V$ gibt es eine r.a. Folge $(x_m)_{m<\omega}$ von Elementen von $|A|$ mit $x_m \neq 0$, $x_{m+1}\cdot V \subseteq x_m\cdot V$ und $\cap\{x_m\cdot V \mid m<\omega\} = \{0\}$. Dann ist $(N_m)_{m<\omega}$ definiert durch $N_m = \{(y,z) \mid y-z \in x_m\cdot V\}$ eine geeignete rekursive Uniformitätsbasis.

Damit sind für rekursive bewertete Körper (A,V,α) die Voraussetzungen von Satz (7.5) und Korollar (7.6) erfüllt, und die in §6 entwickelte Theorie ist anwendbar.

Für die rekursive Vervollständigung von $(A,\mathcal{T}_V,\alpha)$ folgt, daß sie wohldefiniert

und bis auf rekursive Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Sei $(\hat{A},\hat{\tilde{V}},c)$ eine solche rekursive Vervollständigung, dann ist $\hat{V} := \hat{\tilde{V}} \cap |\hat{A}|$ ein Bewertungsring auf $\hat{A}$, der V erweitert. Wir nennen $(\hat{A},\hat{V},c)$ die rekursive Vervollständigung von (A,V,a).

7.3 Rekursivität von bewerteten Körpern

Sei (A,V) ein bewerteter Körper, so bezeichnen wir die Menge $\{x \in V \mid x^{-1} \in V\}$ der Einheiten von V mit u und das maximale Ideal $V - u$ von V mit m. Die Faktorgruppe $(|A| - \{0\},1,\cdot,^{-1}) / u$ schreiben wir additiv, ordnen sie vermöge $x \cdot u > 0 \iff x \in m$ an und nennen diese geordnete abelsche Gruppe die Wertgruppe Γ von (A,V). Γ erweitern wir um $\infty := \{0\}$, setzen $|\Gamma| < \infty$ und nennen $v : |A| \to |\Gamma| \cup \{\infty\} : x \to x \cdot u$ die Bewertung von (A,V). Den Restklassenkörper $\Omega := V/m$ erweitern wir um $\infty := |A| - V$, setzen $x \pm \infty = \infty$, $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot \infty = \infty$, $0^{-1} = \infty$, $\infty^{-1} = 0$ und nennen die kanonische Projektion $\pi : V \to \Omega$ erweitert um $\pi : |A| - V \to \{\infty\}$ die Stelle von (A,V). Die um erweiterten Strukturen bezeichnen wir mit $\overline{\Gamma}$ bzw. $\overline{\Omega}$.

Die Begriffe Bewertung und Stelle sind stark genug, um auf einem Körper einen Bewertungsring, dessen Bewertung bzw. Stelle sie sind, zu definieren:

1. Bewertung: Dazu verlangen wir von Γ die Axiome einer geordneten abelschen Gruppe, von $\infty \notin |\Gamma|$ die Regel $|\Gamma| < \infty$, von v die Axiome

$$vx = \infty \iff x = 0$$

$$v(x+y) \geq \min\{vx,vy\}$$

$$v(x \cdot y) = vx + vy$$

und definieren den Bewertungsring durch $x \in V :\iff vx \geq 0$. In diesem Zusammenhang notieren wir noch die Beziehungen $vx \neq vy \Rightarrow v(x+y) = \min\{vx,vy\}$, $x \in u \iff vx = 0$ und $x \in m \iff vx > 0$.

2. Stelle: Dazu verlangen wir von Ω die Körperaxiome, von $\infty \notin |\Omega|$ die Regeln $x \pm \infty = \infty$, $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot \infty = \infty$, $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$, von π die Axiome

$$\pi 1 = 1$$

$$\pi(x+y) = \pi x + \pi y$$

$$\pi(x \cdot y) = \pi x \cdot \pi y \qquad \text{(sofern definiert)}$$

und definieren den Bewertungsring durch $x \in V \iff \pi x \neq \infty$.

Die drei Möglichkeiten, durch V , v bzw. π einen bewerteten Körper einzuführen, sind im Sinn der folgenden beiden Sätze auch rekursiv äquivalent.

Satz (7.8) Seien (A,α) ein rekursiver Körper und V ein Bewertungsring auf A . Dann sind äquivalent:

(i) $\alpha^{-1}V$ ist rekursiv.

(ii) $\overline{\Gamma}$ ist eine rekursive Struktur $(\overline{\Gamma},\xi)$, und v ist (α,ξ)-berechenbar.

(iii) $\overline{\Omega}$ ist eine rekursive Struktur $(\overline{\Omega},\eta)$, und π ist (α,η)-berechenbar.

Satz (7.9) Seien A ein Körper, c eine Codierung von $|A|$ mit Δ effektiv abgeschlossen und $+$, $-$, $\cdot$ und $^{-1}$ c-berechenbar, und sei V ein Bewertungsring auf A . Dann sind äquivalent:

(i) $V - \{0\}$ und $|A| - V$ sind effektiv offen.

(ii) $\overline{\Gamma}$ ist eine rekursive Struktur $(\overline{\Gamma},\xi)$, und $v| |A| - \{0\}$ ist (c,ξ)-berechenbar.

(iii) $\overline{\Omega}$ ist eine rekursive Struktur $(\overline{\Omega},\eta)$, und $\pi| |A| - \{0\}$ ist (c,η)-berechenbar.

Beweis: Geeignete Numerierungen ξ und η erhält man aus α bzw. c aufgrund der Tatsache, daß Γ und Ω Restklassenstrukturen sind. Die Entscheidbarkeit der Wortprobleme von ξ und η folgt aus den Formeln
$vx \leq vy \iff y \cdot x^{-1} \in V$ $(x \neq 0)$ und $\pi x = \pi y = v((x-y)^{-1}) > 0$ $(x \neq y)$, und (iii) => (i) folgt dann aus $x \in V \iff \pi x \neq \infty$.

Die Analogie zwischen den Sätzen (7.8) und (7.9) und Satz (7.9) selbst legen es nahe, die äquivalenten Bedingungen von Satz (7.9) als einen natürlichen Rekursi-

vitätsbegriff für codierte bewertete Körper anzusehen und weiter zu untersuchen. Wir werden jedoch nur noch zeigen, daß die rekursive Vervollständigung eines rekursiven bewerteten Körpers diese Bedingungen erfüllt. Dazu benötigen wir die Tatsache, daß in einem bewerteten Körper für eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n<\omega}$ die Folge $(va_n)_{n<\omega}$ fast überall konstant ist und daß damit $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ und $\tilde{\Omega} = \Omega$ gilt.

Lemma (7.10) Sei $(\hat{A},\hat{V},c)$ die rekursive Vervollständigung des rekursiven bewerteten Körpers (A,V,α). Dann sind $\hat{V} - \{0\}$ und $|\hat{A}| - \hat{V}$ effektiv offen.

Beweis: Sei (Γ,ξ) die nach Satz (7.8) rekursive Wertgruppe von (A,V,α). Wir zeigen die (c,ξ)-Berechenbarkeit von $\tilde{v}||\hat{A}|$. Seien $a \in |\hat{A}| - \{0\}$ und x eine c-Gödelnummer von a. Dann beschreibt x eine rekursive Cauchy-Folge $(s_n)_{n<\omega}$ mit $s_n \in |A| - \{0\}$ und $\lim s_n = a$. Da $(vs_n)_{n<\omega}$ fast überall konstant ist, wegen $v(s_n+s_{n+1}) \geq n$ und wegen $vs_n \neq vs_{n+1} \Rightarrow v(s_n+s_{n+1}) = \min\{vs_n,vs_{n+1}\}$ läßt sich ein $n < \omega$ mit $vs_n = \lim s_n$ effektiv finden. Es folgt $vs_n = \tilde{v}a$.

Der folgende Satz fasst die bisher bewiesenen Aussagen über die rekursive Vervollständigung eines rekursiven bewerteten Körpers zusammen.

Satz (7.11) Sei (A,V,α) ein rekursiver bewerteter Körper mit (Γ,ξ) als zugehöriger rekursiver Wertgruppe und (Ω,η) als zugehörigem rekursiven Restklassenkörper. Dann gilt für die rekursive Vervollständigung $(\hat{A},\hat{V},c)$ von (A,V,α)

a) $\alpha \leq c$

b) Δ effektiv abgeschlossen

c) Δ^c effektiv c-dicht

d) $|A|$ effektiv c-dicht

e) $+, -, \cdot, ^{-1}$ c-berechenbar

f) ac_A c-berechenbar

g) $\sim_A$ effektiv c-dicht

h) $\hat{V} - \{0\}$, $|\hat{A}| - \hat{V}$ effektiv c-dicht

i) $\hat{v}||\hat{A}| - \{0\}$ (c,ξ)-berechenbar

j) $\hat{\pi}||\hat{A}| - \{0\}$ (c,n)-berechenbar .

7.4 L und K für bewertete Körper

Im Folgenden sei (S,v) ein rekursiver bewerteter Körper, und $(\hat{S},c)$ sei die rekursive Vervollständigung von (S,v). Außerdem nehmen wir an, daß die Theorie von $(\hat{S},vx)_{x<\omega}$ entscheidbar ist und die Quantorenelimination erlaubt. Diese Bedingung werden wir im Beweis von Lemma (7.13) benutzen. Sie geht damit auch in Satz (7.15) ein. In [13] sind eine Reihe von Beispielen angegeben, die diese Bedingung erfüllen. Hier seien nur die Potenzreihenkörper über einem Körper mit entscheidbarer Theorie und der Körper der p-adischen Zahlen genannt. Außerdem verweisen wir in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten [3] und [4,III,§10].

Jeder bewertete Körper A mit $S \subseteq A \subseteq \hat{S}$ ist durch seine algebraischen Eigenschaften als bewerteter Erweiterungskörper von S ein eindeutig bestimmter Unterkörper von $\hat{S}$. Wir werden zeigen, daß die Zugehörigkeit eines Körpers A mit $S \subseteq A \subseteq \hat{S}$ zu der Klasse $L(|\hat{S}|,ac_S,c)$ bzw. der Klasse $K(|\hat{S}|,ac_S,c)$ durch die Rekursivitätseigenschaften von A als uniforme Struktur bzw. als bewerteter Körper über (S,v) bestimmt ist.

Satz (7.12) Sei A ein relativ algebraisch abgeschlossener Körper mit $S \subseteq A \subseteq \hat{S}$. Dann sind äquivalent:

(i) $|A| \in L(|\hat{S}|,ac_S,c)$.

(ii) Es gibt eine Numerierung α von $|A|$ mit $\alpha \leq c$.

(iii) Es gibt eine Numerierung α von $|A|$, so daß zu jedem $x < \omega$ ein Index einer rekursiven Cauchy-Folge von (S,v) berechnet werden kann, die gegen αx konvergiert. D.h.: $\exists f \in G \lim vk(fx,n) = \alpha x$.

(iv) Es gibt eine Numerierung α von $|A|$, so daß für eine kanonische Uniformitätsbasis $(N_m)_{m<\omega}$ die Relation $(vx,\alpha y) \in N_m$ entscheidbar ist.

Beweis: Wir geben nur α an: Seien $|A| \in L$, B eine r.a. c-Beispielmenge von $|A|$ und h eine totale rekursive Funktion, die B aufzählt. Dann leistet $\alpha := c \circ \nu \circ h$ das Verlangte für (ii), (iii) und (iv).

Lemma (7.13) Sei $B \subseteq |\hat{S}|$ über S algebraisch unabhängig, und sei β eine Numerierung von B, so daß die Relation $\nu x - \beta y \in V$ entscheidbar ist. Dann gibt es eine Numerierung α von $ac_S B$ mit $\nu \leq \alpha$ und so, daß $((ac_S B, 0, 1, +, -, \cdot, V), \alpha)$ ein rekursiver bewerteter Körper ist.

Beweis: Wir betrachten die Sprache $L(\hat{S}, \nu x, \beta y)_{x,y < \omega}$. Sei Σ die Satzmenge, die alle Relationen $\nu x - \beta y \in V$ und $\nu x - \beta v \notin V$ beschreibt, und sei Σ' die Satzmenge, die besagt, daß alle βy über S algebraisch unabhängig sind. Dann ist $T = Th(\hat{S}, \nu x)_{x < \omega} \cup \Sigma \cup \Sigma'$ eine vollständige, r.a. und damit entscheidbare Theorie (Quantorenelimination). Nach der effektiven Henkin-Hasenjaeger-Konstruktion (vgl. [4,III]) besitzt T ein rekursives Modell (A', α') mit $\nu \leq \alpha'$. $ac_S B$ ist als Teilmenge in $|A'|$ enthalten, und $\alpha'^{-1}(ac_S B)$ ist r.a. $s \in G$ zähle $\alpha'^{-1}(ac_S B)$ auf, dann ist $\alpha := \alpha' \circ s$ eine rekursive Numerierung von $(ac_S B, +, -, \cdot, V)$.

Lemma (7.14) Sei (A, α) ein rekursiver bewerteter Körper mit $S \subseteq A \subseteq \hat{S}$ und $\nu \leq \alpha$. Dann gilt $\alpha \leq c$.

Beweis: Seien $a \in |A|$ und $(N_m)_{m < \omega}$ eine kanonische Uniformitätsbasis von (A, α). Dann gibt es zu jedem $m < \omega$ ein $s_m \in |S|$ mit $(a, s_m) \in N_m$ und kann effektiv gefunden werden. Damit ist $(s_m)_{m < \omega}$ eine rekursive Cauchy-Folge von (S, ν), die gegen a konvergiert, und aus einem Index von $(s_m)_{m < \omega}$ kann eine c-Gödelnummer von a berechnet werden (s-m-n-Theorem).

Satz (7.15) Sei A ein relativ algebraisch abgeschlossener Körper mit $S \subseteq A \subseteq \hat{S}$. Dann sind äquivalent:

(i) $|A| \in K(|\hat{S}|, ac_S, c)$.

(ii) Es gibt eine Transzendenzbasis B von A über S und eine Numerierung β von B mit $\beta \leq c$.

(iii) Es gibt eine Numerierung α von $|A|$ mit $\nu \leq \alpha$ und so, daß (A,α) ein rekursiver bewerteter Körper ist.

(iv) A ist als Struktur vom Typ $(0,1,+,g,\cdot,V,\nu x)_{x < \omega}$ rekursiv.

Beweis: Wir zeigen nur noch (iv) => (i).

$(|A|, ac, \alpha)$ ist ein semirekursives Matroid und hat nach Lemma (4.9.3) und Lemma (4.5) eine Transzendenzbasis über S aus Π_1. Das Bild dieser Basis unter einer einbettenden Funktion für $\alpha \leq c$ ist eine c-Beispielmenge für diese Basis aus Σ_2. Dann ist $|A|$ nach Satz (6.4) aus $K(|\hat{S}|, ac_S, c)$.

7.5 Folgerungen aus §6 für bewertete Körper

Im Folgenden sei (S,v) ein rekursiver bewerteter Körper, und $(\hat{S},c)$ sei die rekursive Vervollständigung von (S,v). Wir nehmen an, daß die Theorie von $(\hat{S},vx)_{x<\omega}$ entscheidbar ist und die Quntorenelimination erlaubt. Korollar (7.6), die Sätze (7.12) und (7.15) und die Ergebnisse von §6 liefern jetzt die folgenden Aussagen. Dazu bezeichnen wir den Typ $(0,1,+,-,\cdot,V,vx)_{x<\omega}$ mit τ, die Menge der relativ algebraisch abgeschlossenen Unterkörper von $\hat{S}$, die S umfassen und eine rekursive Struktur vom Typ τ sind, mit K, und für $A \in K$ bezeichnen wir die Menge $PA \cap K$ mit $K(A)$.

Satz (7.16) Sei $(N_m)_{m<\omega}$ eine kanonische Uniformitätsbasis auf $\hat{S}$. Dann gibt es einen relativ algebraisch abgeschlossenen Unterkörper von $\hat{S}$, der S umfasst, keine rekursive Struktur vom Typ τ ist, aber eine Numerierung α besitzt, so daß $(vx,\alpha y) \in N_m$ entscheidbar ist.

Satz (7.17) Jedes $A \in K$ besitzt eine rekursive Numerierung α (bezogen auf den Typ τ) und eine Transzendenzbasis $B \subseteq |A|$, so daß $\alpha^{-1}B$ rekursiv ist.

Nach [5] hat nicht jede rekursive Numerierung eines $A \in K$ diese Eigenschaft.

Satz (7.18) Zu jedem $A \in K$ von unendlichem Transzendenzgrad über S gibt es ein $B \in K$, so daß der relativ algebraische Abschluß von $A \cup B$ in $\hat{S}$ nicht in K ist.

Korollar (7.19) $(K,\subseteq)$ ist kein Verband und K besitzt nicht die Amalgamierungseigenschaft.

Satz (7.20) Seien $A \in K$, $B \in K(A)$ und α und α' rekursive Numerierungen von A (bezogen auf den Typ τ). Dann gilt:

a) $\alpha^{-1}B \in \Sigma_2 \iff \alpha'^{-1}B \in \Sigma_2$

b) $\alpha^{-1}B \in \Delta_2 \iff \alpha'^{-1}B \in \Delta_2$

c) $dg_T(\alpha^{-1}B) \cup 0' = dg_T(\alpha'^{-1}B) \cup 0'$.

Satz (7.21) Seien $A \in K$, $B \in K(A)$ und α eine rekursive Numerierung von A (bezogen auf den Typ τ). dann sind äquivalent:

(i) $B \in K$.

(ii) $\alpha^{-1}B \in \Sigma_2$.

Korollar (7.22) Für $A \in K$ ist $(K(A),\subseteq)$ ein Verband, und $K(A)$ besitzt die Amalgamierungseigenschaft

Satz (7.23) Seien $A \in K$ und $B \in K(A)$. Dann sind äquivalent:

(i) B besitzt in $K(A)$ ein unabhängiges Komplement.

(ii) Es gibt rekursive Numerierungen α und β von A bzw. B (bezogen auf den Typ τ), so daß $\beta \leq \alpha$ gilt.

Sind außerdem die Transzendenzgrade von B über S und von A über B unendlich, dann sind (i) und (ii) äquivalent zu:

(iii) Zu jedem nichttrivialen c-Grad α aus Δ_2 gibt es eine rekursive Numerierung α von A (bezogen auf den Typ τ) mit $\alpha^{-1}B \in \alpha$.

Satz (7.25) bleibt nicht gültig, wenn in (iii) c-Grade durch btt-Grade ersetzt werden. Ein Gegenbeispiel liefert [15], da der Normalteiler einer rekursiven Gruppe zum Gruppen-Wortproblem der Faktorgruppe m-äquivalent ist (angewandt auf die additive Gruppe von A).

Während die Sätze (7.16) bis (7.23) als Ergebnisse der rekursiven Algebra im Sinne der Frage 1 aus der Einleitung angesehen werden können, liefern die folgenden Sätze Ergebnisse im Sinne der Frage 2.

Satz (7.24) Sei $A \in K$.

1) Jedes $B \in K(A)$, für das die Transzendenzgrade von B über S oder von A über B endlich sind, besitzt in $K(A)$ ein unabhängiges Komplement.
2) Jedes $B \in K(A)$ von unendlichem Transzendenzgrad über S besitzt einen Unterkörper $C \in K(A)$ von unendlichem Transzendenzgrad über S, der in $K(A)$ ein unabhängiges Komplement hat.

Definition (7.25) Seien $A \in K$ und $B \in K(A)$ und die Transzendenzgrade von B über S und von A über B unendlich.

1) B heißt in A maximal, wenn für jedes $C \in K(A)$ mit $B \subseteq C$ der Transzendenzgrad entweder von C über B oder von A über B endlich ist.
2) B heißt in A supermaximal, wenn für jedes $C \in K(A)$ mit $B \subseteq C$ entweder der Transzendenzgrad von C über B endlich oder $C = A$ ist.

Satz (7.26) Sei $A \in K$ von unendlichem Transzendenzgrad über S.

1) In $K(A)$ gibt es maximale Elemente, die nicht supermaximal sind.
2) In $K(A)$ gibt es supermaximale Elemente.

Wir bemerken noch, daß für ein $B \in K(A)$ die Eigenschaft, bei einer rekursiven Numerierung von A ein Urbild aus Δ_2 zu haben (vgl. Satz (7.20.b)), keine geeignete Übertragung von rekursiv auf $K(A)$ ist. Es gibt sogar ein supermaximales B mit dieser Eigenschaft (vgl. [6]).

7.6 Geordnete Körper als semikonstruktive Matroide

Ein geordneter Körper ist eine Struktur vom Typ $(0,1,+,-,\cdot,\leq)$, die die Axiome für einen geordneten Körper erfüllt. In einem geordneten Körper $(A,\leq)$ sind die Mengen $U_x := \{y \mid -x \leq y \leq x\}$ total geordnet und bilden die Basis der Umgebungen von 0 einer V-Topologie, der natürlichen Topologie $\mathcal{T}_{\leq}$ von $(A,\leq)$. Die Vervollständigung $(\tilde{A},\tilde{\leq})$ des geordneten Körpers $(A,\leq)$ ist auf natürliche Weise ein geordneter Körper, der $(A,\leq)$ als Unterstruktur enthält. Jeder vollständige geordnete Körper ist reell abgeschlossen, d.h. jedes Polynom ungeraden Grades zerfällt, und jedes positive Element ist ein Quadrat.

Lemma (7.27) Sei $(A,\leq,a)$ ein rekursiver geordneter Körper. Dann ist $(A,\mathcal{T}_{\leq},a)$ ein rekursiver V-topologischer Körper.

Beweis: Sei $(x_m)_{m<\omega}$ eine r.a. Folge von Elementen von $|A|$ mit $x_m \neq 0$, die monoton fallend 0 beliebig nahe kommt. Dann ist $(N_m)_{m<\omega}$ definiert durch $N_m = \{(y,z) \mid -2^{-m}\cdot x_m \leq y-z \leq 2^{-m}\cdot x_m\}$ eine geeignete rekursive Uniformitätsbasis.

Damit sind für rekursive geordnete Körper $(A,\leq,a)$ die Voraussetzungen von Satz (7.5) und Korollar (7.6) erfüllt, so daß die $(|\hat{A}|,ac_{\hat{A}},c)$ weitere Beispiele für semikonstruktive Matroide bilden, für die dann die in §6 entwickelte Theorie gilt.

Analog zu den Ergebnissen über bewertete Körper beschreiben wir die rekursive Vervollständigung von $(A,\mathcal{T}_{\leq},a)$: Sie ist wohldefiniert und bis auf rekursive Äquivalenz eindeutig bestimmt. Sei $(\hat{A},\hat{N},c)$ eine solche rekursive Vervollständigung, dann ist $\hat{A}$ mit $\hat{\leq} := \tilde{\leq} \cap {}^2|\hat{A}|$ ein geordneter Körper. Wir nennen

$(\hat{A},\hat{\leq},c)$ die rekursive Vervollständigung von $(A,\leq,a)$. Der folgende Satz stellt das zu Satz (7.11) analoge Resultat für $(\hat{A},\hat{\leq},c)$ dar.

Satz (7.28) Sei $(A,\leq,a)$ ein rekursiver geordneter Körper. Dann gilt für die rekursive Vervollständigung $(\hat{A},\hat{\leq},c)$ von $(A,\leq,a)$:

a) $a \leq c$

b) Δ effektiv abgeschlossen

c) Δ^c effektiv c-dicht

d) $|A|$ effektiv c-dicht

e) $(|\hat{A}|,N,c)$ streng rekursiv

f) $+ , - , \cdot , ^{-1}$ c-berechenbar

g) ac_A c-berechenbar

h) $\sim_A$ effektiv c-dicht

i) $< , >$ effektiv offen .

Beweis: Analog Satz (7.11). (i) gilt wegen $cf < cg \iff \exists n\, b_n^f \leq a_m^g$. Dabei sei die Notation von S.22 benutzt. (vgl. auch S.90)

Da nach einem Resultat von Tarski die Theorie der reell abgeschlossenen Körper die Quantorenelimination erlaubt und entscheidbar ist, gelten außerdem die in den Abschnitten 7.4 und 7.5 für bewertete Körper formulierten Resultate mit $\tau = (0,1,+,-,\cdot,\leq,ax)_{x<\omega}$ wortwörtlich auch für geordnete Körper und ohne Einschränkung an $Th(\hat{A},\leq,ax)_{x<\omega}$.

7.7 Die Bewertung von rekursiven geordneten Körpern

Ein geordneter Körper $(A,\leq)$ heißt archimedisch angeordnet, wenn es zu jedem $a \in |A|$ ein $n < \omega$ mit $n\cdot(-1) \leq a \leq n\cdot 1$ gibt. Sei $(A,\leq)$ ein nicht archimedisch angeordneter Körper. Dann ist die Menge V definiert durch $V := \{a \in |A| : \exists n < \omega\ n\cdot(-1) \leq a \leq n\cdot 1\}$ der endlichen Elemente von A ein Bewertungsring auf A mit $\mathfrak{m}_V = \mathfrak{m}_{\leq}$. Wir werden zeigen, daß für einen rekursiven geordneten Körper $(A,\leq)$ versehen mit einer nichtarchimedischen Ordnung $\leq$, dem zugehörigen Bewertungsring V und der zugehörigen Topologie $\mathfrak{T}$ die für $(A,\leq,\alpha)$, (A,V,α) und $(A,\mathfrak{T},\alpha)$ eingeführten Rekursivitätsbegriffe nicht äquivalent sind.

Satz (7.20) Es gibt einen rekursiven geordneten Körper $(A,\leq,\alpha)$, so daß die Menge V der endlichen Elemente von $|A|$ aus $\Sigma_1 - \Delta_1$ ist.

Beweis: Sei γ eine rekursive Numerierung des geordneten Körpers $(\mathbb{Q},\leq)$ der rationalen Zahlen. Dann liefert Lemma (5.9) angewandt auf $(\dot{\mathbb{Q}},\alpha_0,\gamma)$, ein $S \subseteq \omega$ aus $\Pi_2 - \Delta_2$ und die Mengen $Q_0 = Q_1 = |\mathbb{Q}|$ eine r.a. Folge $(a_x)_{x<\omega}$ von Elementen von $|\dot{\mathbb{Q}}|$ mit

$$\{a_x : x \in S\} \text{ algebraisch unabhängig}$$
$$\{a_x : x \notin S\} \subseteq |\mathbb{Q}|$$
$$a_x < ny,\ ny < a_x \text{ r.a.} \qquad (*)$$

Wenn wir bei der Konstruktion der $(a_x)_{x<\omega}$ im e-ten Schritt im Fall φ_e die folgenden Werte von $\langle gxy \rangle$ außerdem so wählen, daß $\varphi_e(\langle gxy \rangle_c) \leq c(\langle gxy \rangle)$ sichergestellt ist, dann läßt sich die Aufzählung der Ungleichungen $(*)$ zu einer rekursiven Aufzählung von Ungleichungen erweitern, die außerdem genau für $x \notin S$ und $a_x = ny$ noch die Ungleichung $a_x > ny$ enthält. Diese erweiterte Aufzählung ist wiederum benutzbar für die Folge $(a_x)_{x<\omega}$ von Elementen eines nicht archi-

medischen Erweiterungskörpers von $\mathbb{Q}$, in dem die a_x für $x \notin S$ Non-Standard-Elemente sind. Da diese erweiterte Aufzählung vollständig ist und in diesem Erweiterungskörper die a_x algebraisch unabhängig sein können, läßt sich die Konstruktion von Lemma (7.13) bzw. deren Analogon für geordnete Körper anwenden und liefert einen geeigneten rekursiven geordneten Körper $(A,\leq,\alpha)$.

Korollar (7.30) Es gibt einen rekursiven Körper (A,α) und einen Bewertungsring V auf A, so daß (A,T_V,α) ein rekursiver V-topologischer Körper, aber (A,V,α) kein rekursiver bewerteter Körper ist.

7.8 Die rekursiven reellen, komplexen und p-adischen Zahlen

Jeder archimedisch angeordnete Körper ist zu einem geordneten Unterkörper von $\mathbb{R}$, dem Körper der reellen Zahlen isomorph und kann auf nur eine Weise in $\mathbb{R}$ eingebettet werden, und die Vervollständigung eines archimedisch angeordneten Körpers ist auf nur eine Weise zu $\mathbb{R}$ isomorph. Wir werden jetzt ein entsprechendes Resultat für archimedisch angeordnete rekursive geordnete Körper zeigen.

Eine reelle Zahl a heißt <u>rekursiv</u>, wenn die Menge $\{(x,y,z) \in {}^3\omega \mid \frac{x-y}{z+1} \leq a\}$ rekursiv ist. Die Menge der rekursiven reellen Zahlen bildet einen reell abgeschlossenen archimedisch angeordneten Körper, den wir mit $\mathcal{R}$ bezeichnen. Die folgende Codierung wollen wir als die <u>natürliche</u> von $\mathcal{R}$ ansehen. Dazu kürzen wir für $f \in G$ und $m < \omega$ die Zahlen $\langle fm \rangle_1^3$, $\langle fm \rangle_2^3$ bzw. $\langle fm \rangle_3^3$ durch x, y bzw. z ab.

$$
\begin{aligned}
a_0^f &:= -f0-1 \\
b_0^f &:= f0+1 \\
a_{m+1}^f &:= a_m^f + \frac{x+1}{x+2y+z+3}(b_m^f - a_m^f) \\
b_{m+1}^f &:= b^f + \frac{x+y+z}{x+2y+z+3}(b_m^f - a_m^f) \\
c_{\mathcal{R}} &: G \to |\mathcal{R}| : f \to \lim a_m^f \quad .
\end{aligned}
$$

Offenbar ist für jedes $f \in G$ die Intervallfolge $[a_m^f, b_m^f]_{m<\omega}$ eine streng monoton fallende Folge mit $\{\lim a_m^f\}$ als Durchschnitt. Damit ist $c_{\mathcal{R}} f$ eine rekursive reelle Zahl. Umgekehrt läßt sich für $a \in |\mathcal{R}|$ mit bekannten Mitteln der rekursiven Analysis ein $f \in G$ mit $c_{\mathcal{R}} f = a$ finden.

Das folgende Eindeutigkeisresultat für $\mathcal{R}$ folgt aus Satz (2.38) und der Tatsache, daß $(\mathcal{R}, c_{\mathcal{R}})$ versehen mit der natürlichen Uniformität streng rekursiv ist.

<u>Satz (7.31)</u> Sei $(\hat{A}, \hat{\leq}, c)$ die rekursive Vervollständigung des archimedisch an-

geordneten rekursiven geordneten Körpers $(A,\leq,\alpha)$. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\hat{A} \cong R$ und es ist $c \equiv c_R$.

Korollar (7.32) Seien α und α' zwei rekursive Numerierungen des archimedisch angeordneten geordneten Körpers $(A,\leq)$, und $(\hat{A},\hat{\leq},c)$ bzw. $(\hat{A}',\hat{\leq}',c')$ die rekursiven Vervollständigungen. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $(\hat{A},\hat{\leq}) \cong (\hat{A}',\hat{\leq}')$ und es ist $c \equiv c'$.

Korollar (7.33) Sei $(A,\leq,\alpha)$ ein archimedisch angeordneter rekursiver geordneter Körper. Dann gibt es genau eine isomorphe Einbettung $(A,\leq) \to (R,\leq)$ und es gilt $\alpha \leq c_R$.

Die den Abschnitten 7.4 und 7.5 entsprechenden Resultate für archimedisch angeordnete Körper sind besonders einfach. Wir formulieren daher die Entsprechungen zu den Sätzen (7.12) und (7.15). Dazu sei (S,ν) ein archimedisch angeordneter rekursiver geordneter Körper. Wir nehmen $S \subseteq R$ an (s. Korollar (7.33)). Die Korollare ergeben sich für den Fall $S = \mathbb{Q}$.

Satz (7.34) Sei A ein reell abgeschlossener geordneter Körper mit $S \subseteq A \subseteq R$. Dann sind äquivalent:

(i) $|A| \in L(|R|, ac_S, c_R)$.

(ii) Es gibt eine Numerierung α von $|A|$ mit $\alpha \leq c_R$.

(iii) Es gibt eine Numerierung α von $|A|$, so daß zu jedem $x < \omega$ ein Index einer rekursiven Cauchy-Folge von (S,ν) berechnet werden kann, die gegen αx konvergiert. D.h.: $\exists f \in G \lim \nu k(fx,n) = \alpha x$.

(iv) Es gibt eine Numerierung α von $|A|$, so daß die Relationen $\alpha x < \nu y$ und $\alpha x > \nu y$ r.a. sind.

Korollar (7.35) Ein reell abgeschlossener Körper $A \subseteq R$ ist genau dann aus $L(|R|,ac,c_R)$, wenn es eine Numerierung α von $|A|$ gibt, so daß effektiv in x der verallgemeinerte Dezimalbruch (vgl. [14]) für αx berechnet werden kann.

Satz (7.36) Sei A ein reell abgeschlossener geordneter Körper mit $S \subseteq A \subseteq R$. Dann sind äquivalent:

(i) $|A| \in K(|R|,ac_S,c_R)$.

(ii) Es gibt eine Transzendenzbasis B von A über S und eine Numerierung β von B mit $\beta \leq c$.

(iii) Es gibt eine Numerierung α von $|A|$ mit $\nu \leq \alpha$ und so, daß (A,α) ein rekursiver geordneter Körper ist.

(iv) A ist als Struktur vom Typ $(0,1,+,-,\cdot,\leq,\nu x)_{x < \omega}$ rekursiv.

Korollar (7.37) Ein reell abgeschlossener Körper $A \subseteq R$ ist genau dann aus $K(|R|,ac,c_R)$, wenn er ein rekursiver geordneter Körper ist.

So wie wir den Körper der rekursiven reellen Zahlen als Spezialfall der rekursiven geordneten Körper (nämlich als den der rekursiven Vervollständigung von $(\mathbb{Q},\leq,\eta)$) betrachten können, läßt sich der Körper der p-adischen Zahlen als die rekursive Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ versehen mit der p-adischen Bewertung v_p behandeln. Alle wichtigen Ergebnisse sind Spezialfälle der in den Abschnitten 7.4 und 7.5 dargestellten Theorie für den Fall $(S,\nu) = (\mathbb{Q},V_p,\eta)$, und die Eindeutigkeit bis auf $\equiv^{rek}$-Äquivalenz von $(\hat{\mathbb{Q}},\hat{V}_p,c)$ folgt aus der Eindeutigkeit bis auf $\equiv$-Äquivalenz von η und aus Satz (2.38).

Für die Behandlung der rekursiven komplexen Zahlen dürfte sich dagegen eine Übertragung der Ergebnisse über die rekursiven reellen Zahlen mit Hilfe der aus Funktionentheorie bekannten Methoden anbieten. Damit meinen wir folgendes:

Die Resultate von Abschnitt 7.4 und Abschnitt 7.5 erforderten die Erweiterung der Sprache der Körpertheorie um Prädikate oder Funktionen, die die fragliche Topologie zu definieren gestatten. Als Entsprechungen erscheinen hier die Funktionen Im und Re , $\bar{}$ (Übergang zum konjugiert Komplexen) oder $|\ |$ an. Dieses Konzept führen wir nicht mehr aus, sondern zeigen nur noch, daß diese Erweiterungen der Körperstruktur auch rekursiv äquivalent sind:

Satz (7.38) Seien A ein algebraisch abgeschlossener Unterkörper von $\mathbb{C}$ und α eine rekursive Numerierung des Körpers A. Dann sind Äquivalent:

(i) $\alpha^{-1}(|A| \cap |\mathbb{R}|)$ rekursiv.

(ii) Re α-berechenbar.

(iii) Im α-berechenbar.

(iv) $\bar{}$ α-berechenbar.

(v) $|\ |$ α-berechenbar.

Beweis: $\mathrm{Re}z = a \iff a \in \mathbb{R} \,\&\, \exists b \in \mathbb{R}\ z = a+ib$

$\mathrm{Im}z = (z - \mathrm{Re}z)\cdot(-i)$

$\bar{z} = z - 2\mathrm{Im}z$

$|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

$z \in |\mathbb{R}| \iff z|^{2} = (z,-z)$.

§ 8 Topologische Vektorräume

Sei A ein Körper, dann ist ein Vektorraum V über A eine Struktur vom Typ $(0,+,-,f_a)_{a \in |A|}$, die die Vektorraumaxiome erfüllt. Dabei fassen wir die Skalarmultiplikation als eine Folge von einstelligen Operationen auf, schreiben aber für $f_a x$ auch $a \cdot x$. Auf einem Vektorraum V ist der Abschluß lc einer Teilmenge von $|V|$ als Unterraum ein Abschluß-Operator. Ein topologischer Vektorraum (V,T) über dem V-topologischen Körper A heißt lokal beschränkt, wenn das T_2-Axiom und das Axiom (U seien die Umgebungen von 0)

$$\forall U \in U \; \exists a \in |A| \; \forall x \in |V| \; a \cdot x \in U$$

erfüllt. In einem lokal beschränkten Vektorraum ist die Skalarmultiplikation als 2-stellige Operation stetig und sind die 1-stelligen Skalarmultiplikationen gleichmäßig stetig. Damit ist die Vervollständigung eines lokal beschränkten Vektorraumes über A auf natürliche Weise ein topologischer Vektorraum über A und lokal beschränkt. Es ist möglich die Vervollständigung von (V,T) zu einem Vektorraum über $\tilde{A}$ zu erweitern; wir werden darauf jedoch nicht eingehen.

Einen rekursiven Vektorraum (V,ζ) definieren wir stets über einem rekursiven Körper (A,α) als rekursive Struktur vom Typ $(0,+,-,f_{\alpha x})_{x < \omega}$. Nach der Bemerkung im Anschluß an Definition (4.1) ist jeder rekursive Vektorraum versehen mit dem Abschluß lc einer Teilmenge als Unterstruktur ein semirekursives Matroid und im Allgemeinen kein rekursives Matroid.

Definition (8.1) Seien (V,T) ein lokal beschränkter Vektorraum über dem rekursiven V-topologischen Körper (A,α), $N = (N_m)_{m < \omega}$ eine Basis der natürlichen Uniformität von (V,T) und ζ eine Numerierung von $|V|$. Dann heißt (V,N,ζ) ein rekursiver lokal beschränkter Vekrorraum, wenn (V,ζ) ein rekursiver Vektorraum über (A,α), N eine rekursive Uniformitätsbasis auf $(|V|,\zeta)$,

+ und - effektiv gleichmäßig stetig sind, und wenn es eine rekursive Funktion $h \in G$ gibt mit

$$\forall x \in N_{hm}(0)\ \forall a \in |A|\ a \cdot x \in N_m(0) \quad .$$

Aus dieser Definition folgt, daß jeder rekursive lokal beschränkte Vektorraum (V,N,ζ) eine rekursive uniforme Algebra ist. Wir bemerken noch ohne Beweis, daß je zwei rekursiv lokal beschränkte Uniformitätsbasen eines rekursiven Vektorraumes (V,ζ), die dieselbe Topologie erzeugen, $\overset{\text{eff}}{=}$-äquivalent sind.

Satz (8.2) Sei (V,N,ζ) ein rekursiver lokal beschränkter Vektorraum mit unendlicher Trägermenge. Dann gilt für die rekursive Vervollständigung $(\hat{V},\hat{N},c)$ von (V,N,ζ) :

a) $\zeta \leq c$

b) Δ effektiv abgeschlossen

c) Δ^c effektiv c-dicht

d) $|V|$ effektiv c-dicht

e) $(|V|,N,c)$ streng rekursiv

f) $+$, $-$, $f_{\alpha x}$ c-berechenbar

g) lc_V c-berechenbar

h) $\sim_V$ effektiv c-dicht .

Beweis: Analog Satz (7.5).

Korollar (8.3) Sei (V,N,ζ) ein rekursiver lokal beschränkter Vektorraum mit unendlicher Trägermenge. Dann ist $(|\hat{V}|,lc_{\hat{V}},c)$ ein semikonstruktives Matroid.

Das semikonstruktive Matroid $(|\hat{V}|,lc_{\hat{V}},c)$ ist mathematisch weniger interessant, und das mathematisch interessante codierte Matroid $(\hat{V},lc,c)$ ist nicht semi-

konstruktiv. $\sim_\rho$ ist nämlich nicht effektiv c-dicht. Trotzdem lassen sich mit den Sätzen von §6 auch für $(|\hat{V}|, lc, c)$ interessante Aussagen gewinnen, da die Sätze von §6 bestimmte bemerkenswerte lc_V-abgeschlossene Mengen in $(|\hat{V}|, lc_V, c)$ liefern und diese ebenso bemerkenswerte Mengen in $(|\hat{V}|, lc, c)$ darstellen. So ist z.B. K kein Verband, und jedes effektiv c-dichte $A \in K$ enthält maximale und supermaximale Teilmengen.

Die Frage nach einer den Abschnitten 7.4 und 7.5 entsprechenden Theorie für lokal beschränkte Vektorräume führt auf die Frage nach einer geeigneten Operation oder einem geeigneten Prädikat, die es gestatten, T zu definieren. Dazu bieten sich zunächst die Norm oder das Skalarprodukt als Abbildungen von $|V|$ bzw. $^2|V|$ nach $|A|$ an. Diese Operationen lassen sich mit dem hier zugrunde gelegten Begriff von Strukturen mit nur einer Sorte von Elementen nur mühsam beschreiben. Einfacher ist dagegen die Erweiterung des Typs $(0,+,-,f_a)_{a \in |A|}$ um ein einstelliges Prädikat, das den Einheitsball beschreibt, wie er z.B. in Vektorräumen über $\mathbb{Q}$ definiert ist.

Die in den Abschnitten 7.4 und 7.5 benötigte Voraussetzung, daß $Th(\hat{S}, \nu x)_{x < \omega}$ entscheidbar ist und die Quantorenelimination zuläßt, findet auch bei rekursiven lokal beschränkten Vektorräumen eine Entsprechung. Man erhält sie aus den Isomorphiesätzen über Hilberträume.

Literaturverzeichnis

[1] M. Aigner
Kombinatorik II
Springer 1976

[2] P. M. Cohn
Universal Algebra
Harper and Row 1965

[3] Yu. L. Ershov
On the Elementary Theory of Maximal Normed Fields
Soviet Mathematics 6(1965)1390-1394

[4] Yu. L. Ershov
Theorie der Numerierungen I, II, III
Zeitschr Math Log 19(1973)289-388, 21(1975)473-584, 23(1977)289-371

[5] G. Metakides A. Nerode
Effective Content of Field Theory
Ann Math Log 17(1979)289-320

[6] G. Metakides A. Nerode
Recursion Theory un Fields and Abstrct Dependence
J of Algebra 65(1980)36-59

[7] T. S. Millar
Foundation of Recursive Model Theory
Ann Math Log 13(1978)45-72

[8] A. Prestel M. Ziegler
Model Theoretic Methods in the Theory of Topological Fields
J reine angew Math 299/300(1978)318-341

[9] H. Rogers jr.
Theory of Recursive Functions and Effective Compubability
McGraw Hill Book Company 1967

[10] H. H. Schaefer
Topological Vector Spaces
Springer 1971

[11] D. S. Scott
Data Types as Lattics
SIAM J Comput 5(1976)522-587

[12] B. L. van der Waerden
Algrbra II
Springer 1967

[13] V. Weispfenning
On the Elemantary Theory of Hensel Fields
Ann Math Log 10(1976)59-93

[14] E. Wiedmer
Computing with Infinite Objects
Th Comp Sci 10(1980)133-155

[15] M. Ziegler
Ein r.a. btt-Grad, der nicht zum Wortproblem einer Gruppe gehört
Zeitschr Math Log 22(1976)165-168

Lebenslauf

Name:	Hans-Michael Günther	
Wohnort:	Friedberg / Hessen	
Geburtsort und -datum:	Hanau / Main , 9. Dezember 1948	
verheiratet	seit 1974 mit Barbara Günther geb. Kramer	
Vorbildung:	1955 - 1959	Adolf-Reichwein-Schule in Friedberg
	1959 - 1967	Augustinerschule in Friedberg
		1967 Abitur (altspr. Gymnasium)
Studien:	1969 - 1971	Universität Freiburg / Breisgau
		1970 Vordiplom (Mathematik)
	1971 - 1980	Universität Bonn
		1976 Diplom (Mathematik)
Grundwehrdienst:	1967 - 1969	

Bis zum März 1980 war ich wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Bonn.